Dérivation Exercices

Exercice N°1

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

1°) a) Montrer que f est continue en 2.

b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Etudier la dérivabilité de f en 2.

b) Construire la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse 2.

c) Ecrire une équation de (T).

Exercice N°2

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & \text{si } x \in IR^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3°) a) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à C_f au point O.

Exercice N°3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = 4x - 1 + \sin(3x)$.

1°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) Calculer $f'(x)$ puis établir le tableau de variation de f.

3°) a) Montrer que l'équation : $(E) : f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

c) Déduire le signe de $f(x)$.

Exercice N°4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+8$.

1°) Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Montrer que l'équation $(E):f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que $\alpha \in]-3,-2[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} prés.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+4x-2$.

1°) Montrer que l'équation $(E):f(x)=x$ admet une seule solution α comprise entre 0 et 1.

2°) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la courbe (C) de f et la courbe (C') de f^{-1} se coupent au point $A(\alpha,\alpha)$.

Exercice N°6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$.

1°) Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Montrer que l'équation $(E):f(x)=0$ admet exatement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

b) Donner un encadrement à 10^{-1} prés de chacune des solutions.

c) Déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°7

On considère la fonction f définie sur $[4,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x-4}$.

1°) Etudier la dérivabilité de f à droite en 4. et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2°) a) Montrer que f est dérivable sur $]4,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b) Etablir le tableau de variation de f sur $[4,+\infty[$.

3°) a) Montrer que l'équation $(E):f(x)=0$. admet une seule solution α comprise entre 4 et 5.

b) Déduire le signe de $f(x)$ sur $[4,+\infty[$.

Exercice N°8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 3 + 2\sqrt{x+1}$; $x \in [-1, +\infty[$.

1°) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$ puis établir le tableau de variation de f.

3°) a) Montrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$. admet une seule solution α.

b) Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

c) Déduire le signe de $f(x)$ sur $[-1, +\infty[$.

d) Montrer que : $f'(\alpha) = \frac{\alpha - 5}{\alpha - 3}$.

Exercice N°9

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x + 1 - \cos x \ ; & \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1°) Montrer que f est continue en 0.

2°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, +\infty[$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis établir le tableau de variation de f.

3°) Montrer que l'équation (E) : $f(x) = \sqrt{2}$ admet une seule solution sur $]0, +\infty[$.

4°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

Exercice N°10

On considère la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 5 + 2\sqrt{x-2}$.

1°) a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]2, +\infty[$ et établir le tableau de variation de f.

2°) a) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]2, +\infty[$.

b) Vérifier que α est comprise entre 2,09 et 2,10.

c) Déduire le signe de $f(x)$ sur $[2, +\infty[$.

d) Montrer que $f'(\alpha) = \frac{3\alpha^2 - 8\alpha + 5}{2(\alpha - 2)}$.

3°) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 3.