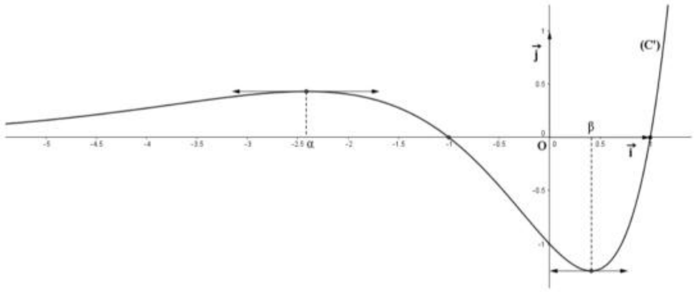
Fonction exponentielle – Logarithme népérien

EXERCICE 1 :

Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par
$f(x) = (ax+b)^2.e^x$, où $a > 0$ et $b < 0$.
La courbe (C') admet une asymptote d'équation : y = 0 au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe $(O,\vec{j})$.



I/ 1) A l'aide des valeurs graphiques de $f'(0)$ et $f'(-1)$, montrer que $a = 1$ et $b = -1$

2) Par une lecture graphique :

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion A et B.

II/ 1) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Vérifier que $f(x) - f'(x) = (2-2x)e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C').

3) Tracer (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\alpha = -1-\sqrt{2}$ et $\beta = -1+\sqrt{2}$)

III/ Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C),(C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

EXERCICE 2:

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On prend comme unité graphique 1cm)

1) Etablir le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I(0,2) est un centre de symétrie de (C).

b) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point I.

3) a) Vérifier que $(e^x+1)^2 \geq 4e^x$. En déduire que $f'(x) \leq 1$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans IR et que $3{,}5 < \alpha < 4$

4) Tracer $\Delta : y = x$, (C) et T.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$K.

c) Tracer dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (C') de f^{-1}.

6) Calculer en fonction de α, l'intégrale I= $\int_2^{\alpha}\left(x - f^{-1}(x)\right)dx$

EXERCICE 3:

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$ et $I_\alpha = \int_0^{\alpha} f(x).dx$ pour tout $\alpha > 0$

1) Montrer que $I_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha > 0$.

2) a) Montrer que $f'(x) + f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire I_α en fonction de α. Calculer alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$

EXERCICE 4:

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$ et $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

1) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{ln2}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$ puis calculer u_1.

2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}dx = \frac{1}{n+2} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_n = ln2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $|v_n - ln2| \leq \frac{1}{n+2}$. Puis calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$

3) a) A l'aide d'une intégration par paries, montrer que $u_n = \frac{ln2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}(ln2 - v_n)$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} (n+1)u_n$

EXERCICE 5:

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = 1 + x – x lnx.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3{,}5 < x_0 < 3{,}6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer f '(x) et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3{,}6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartien l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.