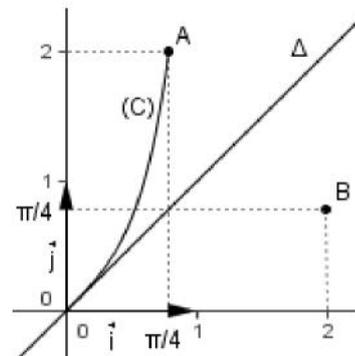


Les intégrales Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ par : $f(x) = (\tan x)^3 + \tan x$. La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y = x$.



- 1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$
- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J .
b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} .
c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$
- 3) Calculer en (u.a) l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE 2 :

Soit F la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

- 1) Montrer que F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $F'(x) = 2$
- 2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$
- 3) a) Calculer alors $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$
b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2} dt$

EXERCICE 3 :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u_{n+2} = \frac{1}{3} \int_0^1 x^n (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} u_n$
c) Calculer alors $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ et $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$

EXERCICE 4 :(QCM)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Préciser la :

- 1) La suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x} \sin^2 x dx$ est une suite :

a) croissante	b) décroissante	c) stationnaire
---------------	-----------------	-----------------
- 2) Soit le réel $I = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \sin^3 x dx$. Alors :

a) $I < 0$	b) $I = 0$	c) $I > 0$
------------	------------	------------



3) On pose pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x) = \int_x^{x^2} \cos^2 t \cdot dt$. Alors :

a) $F(x) < 0$

b) $F(x) = 0$

c) $F(x) > 0$

4) Soit f une fonction continue sur $[2,3]$ telle que : $4 \leq f(x) \leq 5$ alors :

a) $4 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq 5$

b) $2 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq 3$

c) $0 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq 1$

5) Soit $C = \left\{ M(x, y) ; y = \frac{\tan x}{\cos x} \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Alors le volume \mathcal{V} de S est égal à :

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6}$

EXERCICE 5 :

Dans l'espace \mathcal{E} muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(-5, 0, 0)$ et les plans $(P) : 2x - y + 4z - 11 = 0$ et $(Q) : x - 2y - z - 1 = 0$.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D .

2) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de O sur la droite D .

3) a) Déterminer l'équation réduite de la sphère (S) de centre A et tangent au plan (P) .

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on caractérisera.

EXERCICE 6 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé

$(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$

tel que : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$ Soit les points I et

J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[EH]$. Soit K

le point défini par $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{GE}$

2) Déterminer les coordonnées des points de la figure.

3) a) Calculer l'aire du triangle IJK .

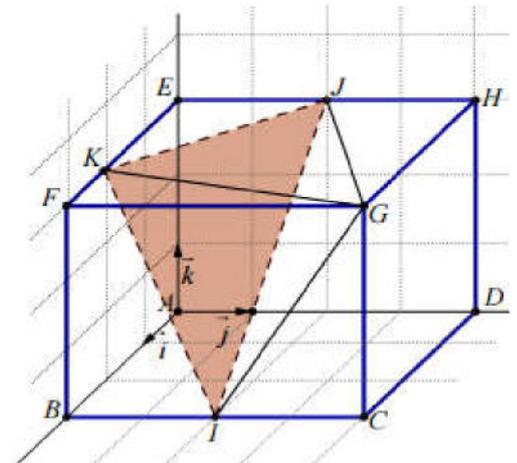
b) Calculer le volume du tétraèdre $IJKG$.

c) En déduire la distance de G au plan (IJK) .

4) Ecrire une équation cartésienne du plan (IJK) .

5) a) Déterminer un système d'équations paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan (IJK) et passant par le point G .

b) Déterminer les coordonnées du point L intersection de Δ et (IJK) .



EXERCICE 7 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $P_m : 2x - y + 2z + m = 0$; (m étant un paramètre réel).

Soit l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et le centre Ω .

2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de (S) et le plan P_m

3) a) Caractériser l'intersection de la sphère (S) et le plan P_3 .

b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans Q et Q' tangents à (S) et parallèles au plan P_3 .



EXERCICE 8 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-2, 2, 1)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(-1, 1, 1)$ et $\Omega(-1, 2, 2)$.

- 1) Soit l'ensemble P des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$
 - a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.
 - b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
- 2) Calculer $\overrightarrow{A\Omega} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$. En déduire que $\Omega \notin P$.
- 3) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC.
- 4) Soit S la sphère de centre $\Omega(-1, 2, 2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.
 - a) Ecrire une équation cartésienne de S.
 - b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle \mathcal{C} .
 - c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle \mathcal{C} .

EXERCICE 9 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

- 1) a) Vérifier que $I_2 = \frac{8}{15}$
 - b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$I_{n+1} = (2n+2) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$$
 - c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$
- 2) On considère les deux fonctions F et G définies sur \mathbb{R} par :
$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^n dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_0^x (\cos t)^{2n+1} dt$$
 - a) Montrer que f et g sont dérivables sur \mathbb{R} et calculer $F_n'(x)$ et $G_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 - b) En déduire que pour tout réel x, on a : $F_n(x) = G_n(x)$
 - c) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^7 dt$

EXERCICE 10 :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On pose pour tout entier $n > 0$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k)$ et $I_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dx$

- 1) a) Vérifier que f est décroissante.
 - b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
- 2) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\frac{1}{1+n^2} \leq I_n \leq 1$
- 3) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dx \leq f(k)$
 - b) Montrer alors que pour tout entier $n > 0$, $S_n - 1 \leq I_n \leq S_n - \frac{1}{1+n^2}$
 - c) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{n+1}{n(1+n^2)} \leq S_n \leq 2$
 - d) Dire alors pourquoi (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite L.

