Les suites réelles
Les équations à coefficients complexes

Séance 2

EXERCICE 1:

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$

1) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$
2) En déduire que pour tout entier naturel ≥ 3 , on a : $u_n \geq (\frac{4}{3})^{n-3} u_3$.
3) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 2:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) a) Calculer : u_2 , u_3 et u_4.
   b) Montrer que, pour tout $n \in$ IN*, on a : $u_n = 2 - 4.\sin^2 \frac{\pi}{2^n}$
   c) En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{8}$
2) a) Montrer que pour tout $n \in$ IN*, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$
   b) En déduire que : pour tout $n \in$ IN*, on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 3:

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 12$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$; $n \in$ IN

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) En déduire que pour tout $n \in$ IN, on a : $u_n \geq v_n$
3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.
4) On pose pour tout $n \in$ IN, $t_n = 3u_n + 8v_n$
   a) Montrer que (t_n) est une suite constante.
   b) En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 4:

Soit (a_n) une suite réelle définie sur IN par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + {a_n}^2}}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 < a_n \leq 1$
   b) Etudier la monotonie de (a_n), puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite ℓ.
2) Pour tout $n \in$ IN, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
   a) Calculer : u_0 et v_0
   b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L.
   c) Montrer que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$

EXERCICE 5:

1) a) Calculer $(2 + i)^2$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 3(2 + i)z + 2(3 + 4i) = 0$
   c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 3(2 + i)z^2 + 2(3 + 4i) = 0$

2) Soit l'équation (E') : $z^3 - 2(3+2i)z^2 + (3+14i)z + 8 - 6i = 0$

a) Montrer que l'équation (E') admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_1.

b) Soit le polynôme P(z)= $z^3 - 2(3+2i)z^2 + (3+14i)z + 8 - 6i$

Déterminer les complexes a, b et c tels que : $P(z)=(z-z_1)(az^2+bz+c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

EXERCICE 6:

On considère les suites U et V définies sur IN par :

$$U_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in IN \quad V_n = \frac{2}{U_n} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

1) Calculer : V_0, U_1, V_1, U_2 et V_2.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, on a : $\begin{cases} 1 \le U_n \le 2 \\ et \\ 1 \le V_n \le 2 \end{cases}$

3) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$. [1] (On pourra remarquer que : $U_n.V_n = 2$).

4) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > V_n$.

5) Montrer que U est décroissante et que V est croissante.

6) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \le 1$.
En déduire que $(U_n - V_n)^2 \le U_n - V_n$. [2]

7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout $n \in IN$, on a :
$$U_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{1}{4}(U_n - V_n).$$
En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

8) Montrer que les deux suites U et V sont convergentes vers la même limite ℓ qu'on calculera.

EXERCICE 7: (Bac "contrôle" 2014)

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$.

1) a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E).

2) a) Donner l'écriture exponentielle de $1-\mathrm{i}$.

b) Vérifier que pour tout nombre complexe z :
$$2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - \sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) - 2i = -2i(z^2 - z + 1).$$

c) Montrer que les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

e) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.