Limites et continuité

Séance 1

EXERCICE 1:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-sinx}}{x}$

1) Montrer que pour tout $x \in IR^*$, on a : $f(x) = \frac{sinx}{x(1+\sqrt{1-sinx})}$

2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

EXERCICE 2:

Soit la fonction $f : \mathrm{x} \mapsto \frac{1-2\mathrm{x}\sin(3\mathrm{x})}{\mathrm{x}^2+1}$

Montrer que pour tout réel x< 0, on a : $\frac{2x+1}{\mathrm{x}^2+1} \leq f(\mathrm{x}) \leq \frac{1-2x}{\mathrm{x}^2+1}$. En déduire $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} f(\mathrm{x})$

EXERCICE 3:

Soit f : $\mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}}.\sin\mathrm{x} + 2$; $\mathrm{x} \neq 0$

1) Montrer que pour tout x≠0 on a : $|\mathrm{f(x)} - 2| \leq \left|\frac{1}{\mathrm{x}}\right|$

2) En déduire $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{f(x)}$

EXERCICE 4:

Soit les fonctions $f : \mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}}$ et $g : \mathrm{x} \mapsto \sqrt{\mathrm{x}+1}$

1) Calculer $f \circ g\,(3)$; $g \circ f\,(-2)$

2) Définir chacune des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

3) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0^+} g \circ f\,(\mathrm{x})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} g \circ f\,(\mathrm{x})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to(-1)^+} f \circ g\,(\mathrm{x})$

EXERCICE 5:

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = u \circ v$:

a) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x} + 1)$ b) $f(x) = \frac{3\sqrt{\mathrm{x}}+1}{\sqrt{\mathrm{x}}-4}$ c) $f(x) = \sqrt{1+cosx}$ d) $f(x) = |x^2 - x^4|$

EXERCICE 6:

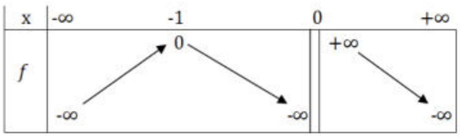
Soit les fonctions $f : \mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}-3}$ et $g : \mathrm{x} \mapsto \sqrt{\mathrm{x}+3}$

1) Montrer que la fonction gof est continue en 2.

2) Montrer que la fonction gof est continue sur $]3,+\infty[$.

EXERCICE 7:

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0}.



1) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} f(-1+\frac{1}{\mathrm{x}^2})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} f\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} f(\sqrt{\mathrm{x}})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} f(\mathrm{x}^3 + \frac{1}{\mathrm{x}+1})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0^+} \sqrt{1 - fof(x)}$ et $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-1} \frac{1}{f(x)}$

2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :
$]-\infty,-1]$, $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans IR\{0}

b) En déduire le tableau signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$.

Librairie Devoir.TN 53 04 42 33 | 99 06 27 69

EXERCICE 8:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\le 0 \\ 1+x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a- Montrer que, pour tout $x>0$, $1-x\le f(x)\le 1+x$

b- Etudier alors la continuité de f en 0

2) a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,0[$ une unique solution α

b- Vérifier que $-0.7<\alpha<-0.6$

3) a- Montrer que la fonction h : $x\mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

b- Montrer que la fonction f est continue sur IR.

EXERCICE 9:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right[\\ 2x+\sqrt{x^2+\left(\dfrac{9}{4}\right)} & \text{si } x\in\left[0,+\infty\right[\end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x<0$, on : $0\le f(x)-1\le\dfrac{2}{x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$

b- Etudier la continuité de f en 0

3) a- Justifier la continuité de f sur $\left[0,+\infty\right[$

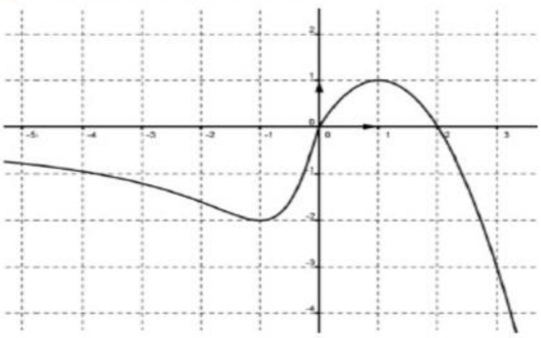
b- Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$. Déterminer $f\left(\left[0,2\right]\right)$

c- En déduire que l'équation $2f(x)-7=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left[0,2\right]$.

EXERCICE 10:

C_f **admet au voisinage de :**

- $-\infty$ **une asymptote d'équation** $y=0$.
- $+\infty$ **une branche infinie parabolique de direction la droite d'équation** $x=0$



1) **Déterminer :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
2) **Déterminer :** $f(IR)$ **et** $f\circ f(IR)$
3) *a*- **Déterminer graphiquement le domaine de définition de** f, **de** $u=\dfrac{1}{f}$ **et de** $v=\sqrt{f}$.

b- **La fonction** u **est elle prolongeable par continuité en 2?**

4) **On considère la fonction** $g: x\mapsto\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ **et la fonction** $h=g\circ f$

a – **Montrer que** h **est continue sur** $]2,+\infty[$.

b – **Déterminer** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ **et** $h(3)$.

5) **Soit** k **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$, **par** $k(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\ge 0 \\ x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right) & \text{si } x<0 \end{cases}$

a – **Montrer que pour tout** $x<0$, **on a** $0\le k(x)\le 2x^2$.

b – **En déduire que** k **est continue en 0.**

c – **Montrer que** $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\dfrac{\pi^2}{2}$. **Interpréter graphiquement le résultat.**

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69