EXERCICES SUR LA FONCTION LOGARITHME

EXERCICE 1 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x-2)+\ln(x+1)=\ln(3x-5)$; $\ln(2x-5)=0$.

b) $2\ln(x-2)+\ln(3x+1)=2\ln 2$; $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 5+2\ln 3$.

c) $\ln|x+1|+\ln|x-5|=\ln 16$; $\ln|6-x|=1$.

d) $\ln(-x-1)=\ln\left(\dfrac{-x-10}{x+2}\right)$; $\ln x-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{15}{4}$.

e) $6\ln^2 x+7\ln x-3=0$; $\ln^3 x-2\ln^2 x-\ln x+2=0$.

f) $2\ln(2x-1)-\ln(3x-2x^2)=\ln\left(\dfrac{4x-3}{x}\right)$; $\ln(x+2)+1=\ln(x-1)+\ln 2$.

g) $2\ln x=\ln 2+\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+\ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

h) $(\ln x)^2-7\ln x+6=0$; $2(\ln x)^2-3\ln x+1=0$.

i) $\log x+\log(3-x)=\log 5$; $\log_3^{\sqrt{x}}\quad \dfrac{1}{2}\quad \log_9^{(4x+15)}=0$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x^2-10x+9)\geq \ln(3x-27)$; $\ln[x(3-x)]\leq \ln 2$

b) $\ln(5x^2+6x+1)>0$; $2(\ln 2x)^2-5\ln 2x-3\leq 0$

c) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right)\leq 0$; $\ln(x+5)+\ln(x+4)\leq \ln(x+13)$

d) $\ln x+\ln(2-x)+\ln(x+4)\geq \ln(5x)$; $\ln^2 x+2\ln x-15<0$

e) $\ln x-\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{8}{3}$; $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln 3x$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x+\ln y=6\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\ln x-3\ln y=9 \\ \ln x+5\ln y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(x^3y^4)=6 \\ \ln\left(\dfrac{x^2}{y^5}\right)=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln y=\ln x+2 \\ xy=9e^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x^3+\ln y^2=3 \\ \ln y^2-\ln x^2=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x^3-\ln y^2=-4 \\ \ln x+\ln y^4-1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=29 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=4e \\ \log x+\log y=2+\ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=243 \\ \log_x^y+\log_y^x=\dfrac{17}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} xy=256 \\ \log_y^x+\log_x^y=\dfrac{50}{7} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \ln(x-2)+3\ln(y-1)=0 \\ 2\ln(x-2)-\ln(y-1)=4 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(\sin x)+\ln(\cos x)=\ln\sqrt{3}-\ln 4 \\ 2(\sin x+\cos x)=\sqrt{3}+1 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)=9 \\ \ln(x\,y^5)=\dfrac{-17}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x+1}-3\log_2^y=-11 \\ 2^{x+2}+7\log_2^y=43 \end{cases}$

EXERCICE 2

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$

2°) Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

a) $f(x)=2x+1+\ln(3x-12)$; b) $f(x)=x^2\ln(-x^2+6x-5)$; c) $g(x)=\ln(3x-6)+\ln(x+4)$

d) $g(x)=x\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$; e) $g(x)=x+1+\ln\left(\dfrac{2x-4}{-x+5}\right)$; f) $g(x)=\ln\left|-3x+12\right|$; g) $g(x)=\ln\left|x^2-16\right|$

h) $p(x)=\ln\left|-x^2-3x+4\right|$; i) $q(x)=-3x+1+\ln\left|\dfrac{x+3}{-x+5}\right|$; j) $r(x)=x^2-3+\ln\left|3x-21\right|$.

k) $S(x)=x^2\ln\left(\left|1+\dfrac{1}{x}\right|\right)$; L) $T(x)=3x+2-\ln(\sqrt{-x^2+3x-2})$; m) $u(x)=\sqrt{3-\ln x}$

n) $v(x)=\dfrac{x-5}{\ln^2 x-4\ln x+3}$; o) $i(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-5x+6}{-x^2+7x+8}\right)$; p) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} \\ f(0)=-1 \end{cases}$

q) $\begin{cases} f(x)=x\ln(3-\ln x) & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; r) g(x) = $\dfrac{\ln(x^2-5x+4)}{\ln(x^2+7x+10)}$; s) h(x)= $\ln(x^2-1)-\ln(2x^2-8)$.

3°) Soient les fonctions $f\ : x\mapsto f(x)=\ln x$ et $g : x\mapsto g(x)=\ln(x+2)+1$.

a) Ecrire $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) Déterminer les ensembles de définition de f et de g .

c) à partir du tableau de variation de f déduire celle de g .

EXERCICE 3 :

A) On considère la fonction g définie par $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1°) Etudier les variations de g .

2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x)=-x+3+\dfrac{\ln x}{x}$.

1°) Etudier les variations de f .

2°) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (**Δ**) d'équation y = –x+3 comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (**Δ**).

3°) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (**Δ**). Donner une équation de cette tangente.

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α∈]0 ; 1]; puis une solution unique β dans [3 ; 4].

5°) Tracer (Cf) et (**Δ**) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

6°) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (**Δ**) et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

EXERCICE 4 :

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x + \ln|x|$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.
Déterminer les limites de f aux bornes de Df .

2°) Calculer $f(-1)$ *et* $f(1)$; étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec la droite $(\mathcal{D})$ d'équation y = x.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0\,;1]$.

5°) En déduire le signe de $f(x)$ dans Df .

6°) Tracer sa courbe représentative (Cf) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

7°) Déterminer en cm² l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations x = 1 et x = e.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + x - 3x\ln x$.

1°) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$? Si oui déterminer son prolongement g .

2°) Déterminer l'intervalle **I** de définition de g .

3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$.

4°) a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que dans $[1\,;2]$ $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α.

5°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ puis interpréter.

6°) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

EXERCICE 6 :

I) Soit f l'application de $]-1\,;5]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 1 - \ln(x+1)$.
On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm.

1°) Etudier le sens de variation de f et la limite de f quand x tend vers (–1).
Donner le tableau de variation de f .

2°) a) Calculer les images par f des réels : 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. En donner une valeur approchée à 0,1 près.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse : $\dfrac{-1}{2}$.

3°) Construire (T) et (Cf) .

II) – On appelle D l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$$0 \le x \le 5 \quad ; \quad 1 \le y \le f(x).$$

A] 1°) f' désigne la fonction dérivée de f .

a) Etudier le sens de variation de f' et donner son tableau de variation.

b) En déduire, pour x ϵ [0 ; 5] : $0 \leq f'(x) \leq \frac{5}{6}$.

2°) En appliquant l'inégalité des accroissements finis au segment [0 ; x], établir que : $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{6}x + 1$.

3°) a) Tracer la droite d'équation : $y = \frac{5}{6}x + 1$.

b) Déduire de ce qui précède une majoration de l'aire de D.

B] On appelle $\mathcal{a}$ l'aire de D, en cm^2.

1°) Exprimer $\mathcal{a}$ à l'aide d'une intégrale.

2°) Donner la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

En déduire $K = \int_0^5 \ln(x+1)dx$.

3°) Calculer $\mathcal{a}$; en donner une valeur approchée à 1 cm^2 près par défaut.

<u>EXERCICE 7</u> :

A] Soit $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1°) Etudier la fonction g ;

2°) a) Calculer $g(1)$;

b) En utilisant le tableau de variation de g, déduire que : $g(x) > 0$ ∀x∈]0;1[

B] Soit $f(x) = \frac{-1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f.

b) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de Df : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

d) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

2°) Soit (Cf) la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. Soit D la droite d'équation : $y \quad \frac{1}{2}x \quad 3$.

a) Donner suivant les valeurs de x le signe de $h(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)$ et en déduire la position de (Cf) par rapport à D.

b) Soient respectivement M et N les points de même abscisse x de (Cf) et D. Calculer la distance MN en fonction de x. Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

c) Construire (Cf) et D.

3°) a) Calculer la dérivée de la fonction U définie par $U(x) = (\ln x)^2$

b) En déduire l'aire A du domaine plan limité par (Cf) la droite D et les droites d'équations : x = 1 ; x = e².

EXERCICE 8:

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) \;=\; 1 \end{cases}$

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm).

1°) a) Prouver que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$.

b) En déduire que $\forall x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$.

2°) Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$

a) Calculer $g'(x)$

b) Prouver que pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{x^2}{4}$

c) En déduire que pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{12} \qquad (2)$.

3°) Etude des variations de f .

a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) Etablir que pour $x \geq 0$ on a : $g(x) \leq \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

Grâce à (2) établir le sens de variation de f .

4°) a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞.

b) à l'aide de (2) montrer que pour $x \geq 0$ on a :

$x - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{2x}{2+x} \leq x - \ln(1+x) \leq x - \dfrac{2x}{2+x}$. puis $\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{x}{12} \leq \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{x+2}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et en déduire que $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

d) Soit T la tangente à (Cf) en $x_0 = 0$.

En utilisant (1) montrer que (Cf) est au-dessus de T pour $x \in IR_+^*$.

5°) Dresser le tableau de variation de f . Tracer (Cf) et T dans le même repère.

EXERCICE 9:

Partie A : On considère la fonction g définie sur]0 ; + ∞ [par : $g(x)=\ln(1+\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x^2+1}$.

1°) a) Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x ε, $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *puis* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

3°) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha)=0$.

Vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

4°) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur]0 ;+ ∞[.

Partie B : On considère la fonction f définie sur]0 ;+ ∞[par :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x^2}) \quad si \ x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 5cm.

1°) a) Montrer que pour tout x ∈]0 ;+ ∞[, on a $f'(x)= g(x)$.

b) En déduire les variations de f sur]0 ;+ ∞[.

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$; en déduire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

3°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1 \quad \frac{1}{x^2}) \quad 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

Préciser la tangente à la courbe (Cf) en x=0.

4°) a) Prouver que, pour tout élément x de [0,5 ; α] ; $0 \le f'(x) \le f'(0{,}5)$.

b) En déduire que, pour tout élément x de [0,5 ; α] :

$$0\le f(\alpha)-f(0{,}5)\le(\alpha-0{,}5)f'(0{,}5) \quad puis \ \ que \quad 0\le f(\alpha)-f(0{,}5)\le\frac{1}{10}f'(0{,}5).$$

d) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5°) Dresser le tableau de variations de f. Tracer la courbe de f .

6°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations x = 0 et x = 1.

EXERCICE 10:

Partie A : On considère la fonction g définie sur]0 ; + ∞ [par :

$$g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$$

1°) Etudier le sens de variations de g.

2°) a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans] 0 ; + ∞ [.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

3°) Déduire le signe de $g(x)$ sur]0 ;+ ∞[.

Partie B : On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$$

On appelle (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité Graphique 2 cm.

1°) Etudier les limites de f en 0 et en +∞ puis interpréter graphiquement ces limites.

2°) a) Montrer que, pour tout x de]0 ; + ∞[, $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$.

b) En déduire les variations de f .

c) Montrer que, $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f .

3°) Construire la courbe (Cf) de f .

Partie C : On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\begin{cases} 1\le x\le \frac{3}{2} \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

1°) Montrer que, pour tout x ≥1 : $\frac{\ln x}{x^2}\le f(x)\le \frac{\ln x}{x}$.

2°) a) Calculer $I=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x}dx$;

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

3°) a) Déduire un encadrement de $K=\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$.

b) Exprimer A en fonction de K, puis déduire une valeur approchée de A en cm^2.

EXERCICE 11:

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

1°) Après avoir montré que, pour tout x réel $x \neq \ln x$, préciser l'ensemble de définition de la fonction f . Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

2°) Etudier les variations de cette fonction en précisant éventuellement les asymptotes.
3°) Construire la représentation graphique des variations de la fonction f dans le plan rapporté à un repère. (On donnera l'équation de la tangente au point d'abscisse x = 1).

EXERCICE 12:

Soit la fonction P définie par $P(x) \quad (1 \quad \frac{1}{x})\ln(1 \quad x)$.

1°) h désigne la fonction numérique définie par : h(x) = x – ln(1+x).

Etudier le sens de variation de h et le signe de h(x).

2°) Quelle est l'ensemble de définition de P noté D_P ?

Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$; $\lim\limits_{x\to-1} P(x)$.

On désigne par F l'application de $D_P \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} F(-1)=0 \\ F(x)=P(x) \quad pour \ \ x\in D_P \end{cases}.$$

Etudier la dérivabilité de F en x = –1.

3°) Quelle est la limite de P(x) quand x tend vers 0 ?

On désigne par f l'application de $D_P \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=F(x) \end{cases} \quad \text{Pour } x \in D_P \cup \{0;-1\} \ ;$$

4°) Etudier les variations de f en utilisant en particulier la question 1°).

Construire la courbe représentative de f .

EXERCICE 13:

1°) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)} - \ln(1+x)$$

b) Étudier les variations de la fonction g définie sur [0 ; +∞[par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

c) Déduire des questions précédentes que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)} \qquad (1)$$

d) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x(x+2)}{2(x+1)} < x$. (2).

2°) a) Déduire de (1) et (2) que pour tout y > 0,

$$\frac{1}{1+y} < \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) < \frac{1}{y}.$$

b) Déduire de (1) et (2)que pour tout z > 0,

$$\frac{z-1}{z} < \ln z < z-1.$$

3°) Utiliser l'un de ces encadrements pour encadrer lna dans chaque cas suivant :

a = 0,5 ; a = 0,8 ; a = 0,98 ; a = 1,02 ; a = 1,5.

EXERCICE 14:

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur]0 ; +∞[par :

$f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + 1 - \ln x\right)$ et construire sa courbe représentative Cf dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

1°) Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et en +∞.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $1{,}30 \le \alpha \le 1{,}35$.

c) Etudier le signe de $g(x)$.

2°) a) Etudier les limites de f en 0 et en +∞.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f.

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en +∞ à la courbe Cf.

b) Déterminer le point d'intersection A de Cf et (Δ) ; préciser la position de Cf par rapport à la droite (Δ).

c) Construire la courbe Cf et la droite (Δ), en précisant la tangente en A à Cf.

EXERCICE 15:

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

1) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α ϵ [$\frac{1}{2}$; 1].
3) Donner un encadrement α de par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$ avec n entier naturel.
4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

B) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. Soit (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Étudier les limites de f en $-\infty$; en 0 et en $+\infty$.
2) Calculer $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de f.
3) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.
4) En utilisant l'encadrement de α trouvé au A) 3°) montrer que :

$$1{,}6 < f(\alpha) < 2{,}1.$$

C) soit les points M(x ; y) et M'(x' ; y') dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
2) Démontrer qu'une équation de la courbe (Γ) à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe (Cf) est la suivante : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$
3) Étudier la position relative de (Γ) par rapport à (Cf).

D) On considère un réel m supérieur à 1.

Soit h la fonction définie sur [1;+∞[par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1) Démontrer que H définie sur [1;+∞[par $H(x) = -\frac{1+\ln x}{x}$ est une primitive de h.
2) On désigne par A(m) l'intégrale $\int_1^m [2x - f(x)]dx$. Calculer A(m).
3) Déterminer si elle existe la limite de A(m) quand m tend vers +∞.

EXERCICE 16:

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

1) Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition. On appelle (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Préciser les asymptotes à la courbe (Cf) de f. En particulier on établira l'existence d'une asymptote oblique ($\mathcal{D}$).
2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à ($\mathcal{D}$).
4) Construire la courbe de f.

EXERCICE 17:

A/– Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln\left|x^2 - 2x - 3\right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Ecrire f(x) sans valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de la courbe de f.
5. Tracer la courbe représentative (Cf) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

B/– Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 \quad et \quad f(0) = 0$$

1. Etudier le signe de $f'(x)$
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
3. Quelle est la demie tangente en $x_0 = 0$?
4. Donner l'équation de la tangente (T) en $x_0 = e$.
5. Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.
6. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x(\ln x - 1)$.
   a) Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f.
   b) Calculer l'aire A(λ) de la portion du plan comprise entre ($\mathcal{C}_f$) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ ($0<\lambda<1$) ; x = 1.

7. Calculer $\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda)$.

EXERCICE 18:

Pour *m* réel on considère la famille de fonctions f_m définie par

$$f_m(x) = x + \ln\sqrt{x^2 + mx + 1}$$

1. pour m = 2 étudier les variations de f_m

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de m, noté V_m pour que f_m soir définie sur □.

3. Montrer que les courbes (C_m) des fonctions f_m passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

4. Pour *m* = 0, on considère la fonction f_0

a) Etudier les variations de la fonction f_0.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_0 sur son ensemble de définition.

5. a) Montrer que la courbe (C_0) de f_0 admet deux points d'inflexion dont on donnera leurs coordonnées.

b) Etudier les branches infinies de (C_0) ;

c) Tracer la courbe (C_0) dans le plan muni d'un orthonormé.

6. Soit la fonction F définie par : $F(x)\quad \frac{x^2}{2}\quad \frac{x}{2}\ln(x^2\quad 1)$

a) Quel est son domaine de définition ?

b) Montrer que l'on a : $F'(x) = f_0(x) + \frac{x^2}{x^2+1}$;

c) Soit h une primitive de la fonction u telle que : $U(x) = \frac{1}{1+x^2}$ vérifiant

h'(x) = U(x) et h (0) = 0 ; h(1) = $\frac{11}{4}$. En déduire une primitive de la fonction f_0

(On montrera que : F'(x) = $f_0(x) + 1 - U(x)$). Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C_0) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

7. Pour m ∊ V_m, on considère la droite (D_m) d'équation $y = x + m$.

a) Montrer que pour tout m de V_m et $m > 0$ l'intersection de (C_m) et (D_m) contient toujours deux points dont on donnera les coordonnées ; on les notera M_m et M'_m.

b) Montrer que les points M_m et M'_m sont symétriques par rapport à un point I_m

c) Que se passe-t-il si on fait tendre *m* vers 0 ?.

EXERCICE 19:

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ;
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]1;+\infty[$ une solution unique α. Vérifier qu'une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut est 3,9.
4. Préciser suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(0)=0$ et $g(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t \succ 0$.

1. Etudier la continuité puis la dérivabilité de g au point t = 0.
2. Montrer que pour tout réel t strictement positif on a : $g'(t)=\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}f(t)$.
3. a) Calculer la limite de g en $+\infty$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.

On prendra pour unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées. Construire la courbe (**Γ**) de g.

Partie C :

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire A, en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation : x = 1.

1. a) Démontrer que la fonction g_1 définie sur $[0;+\infty[$ par : $g_1(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$ est dérivable en 0.

b) Soit **φ** la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x)=2\sqrt{x}\ln(1+x)-\int_0^x \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

Montrer que **φ** est dérivable en tout point de l'intervalle $[0;+\infty[$ et que **φ**'(x)= g(x).

2. Déduisez des questions précédentes que : $A=2\ln 2-\int_0^1 \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

et K la fonction définie sur l'intervalle I = $\left[\ 0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $K(\theta)=\tan^2\theta$ et

$$h : x \mapsto \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt.$$

a) Calculer $(h\circ k)(\theta)$;

b) Prouver que, pour tout θ ∊ I, $(h\circ k)'(\theta)=4\tan^2\theta$.

c) Ecrivez $\tan^2\theta$ sous la forme $(\tan^2\theta + 1) - 1$ puis déterminer une primitive de $(h\circ k)'$. Donner l'expression de $(h\circ k)$.

d) Calculer h(1).

4. Déduisez des résultats précédents la valeur exacte de A.

EXERCICE 20:

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n ; n $\in \mathbb{N}^*$ définies sur l'intervalle]0 ;+∞[par : $f_n(x) = x - n - \frac{n\ln x}{x}$. La courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm est notée (C_n).

A) Etude des variations de f_n ; n $\in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction g_n définie sur]0 ; +∞[par

$$g_n(x) = x^2 - n + n\ln x.$$

a) Etudier le sens de variation de g_n et préciser ses limites en 0 et en +∞.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n ; et que α_n appartient à [1 ;3].

2°) a) Etablir que, pour x ∈]0 ; +∞[: $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$.

b) Déterminer le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

3°) a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en +∞.

b) Montrer que la droite (D_n), d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe (C_n), puis étudier la position de (C_n) par rapport à (D_n) sur l'intervalle] 0 ; +∞[.

B) Etude des cas particuliers n = 1 et n = 2.

1°) α_n étant le nombre définie en A) 1°) montrer que :

- Pour n = 1, $\alpha_1 = 1$; Pour n = 2 ; $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2°) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus montrer que $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$. En utilisant le sens de variation de f_2,
montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.

3°) Donner les tableaux de variations de f_1 *et de* f_2.

4°) Représenter dans le même repère les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2) .

C) Etude des positions relatives des courbes (C_n).

1°) Pour tout entier naturel n , et pour tout réel x de l'intervalle]0 ; +∞[, calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers + ∞.

2°) Soit d la fonction définie sur]0 ; +∞[par $d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Etudier les variations de d , préciser ses limites en 0 et en +∞.

b) Déduire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle]0 ; 1[.

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a $f_n(\beta) = \beta$.

3°) A l'aide des résultats obtenus dans les questions C) 1°) et 2°), établir que toutes les courbes (C_n) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

Pour n $\in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}).

EXERCICE 21:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

2°) Démontrer que pour tout x de D_f $f(x) > x + |x|$.

3°) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.

4°) Etudier la fonction et tracer sa courbe représentative (C_f).

5°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

a) résoudre l'équation $g(x) = -\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

b) Démontrer que g est une fonction impaire ;

c) Etudier g et tracer sa courbe (Cg).

d) Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; et que pour tout entier relatif n,

$$g\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = n.$$

EXERCICE 22:

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1°) Étudier les variations de la fonction f ;

2°) Construire la courbe (Cf) de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 10cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

3°) On note λ un réel strictement positif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x \, dx$;

b) En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer la limite ℓ de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0^+.

4°) Pour tout entier naturel n supérieure ou égal à 2 on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur $]0\,;1]$; démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1 \le p \le n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \le \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n$, puis que

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 23

Une entreprise fabrique un produit en quantité x, exprimée en milliers de tonnes. Le coût total de fabrication est donné par : $C_T(x)\quad \frac{x^2}{2}\quad \frac{9}{2}\ln(x\quad 1)$

pour x$\in$[0 ; 5]. Les coûts sont exprimés en millions de dinars.

A-/ Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction f définie sur [0 ; 5] par : $f(x)\quad \frac{x^2}{2}\quad \frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)$.

1°) Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x)=\frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.

2°) Établir le tableau de variation de f sur [0 ; 5].

3°) En déduire que f s'annule sur [0 ; 5] pour une valeur unique ℓ.

4°) Déterminer des résultats précédents le signe de f sur [0 ; 5].

B-/ Étude d'un coût moyen C_m.

La fonction coût moyen est définie sur [0 ; 5] par : $C_m(x)=\frac{C_T(x)}{x}=\frac{x}{2}+\frac{9}{2}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$

1°) Calculer $C_m'(x)$. Vérifier que l'on peut écrire $C_m'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question A-/.

2°) Étudier le sens de variation de C_m sur]0 ; 5].

3°) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal exprimé en dinars par tonnes ? Quel est ce coût ?

EXERCICE 24 :

Une entreprise fabrique des objets dont le coût de production en francs, de q objets est donné par la fonction C(q) = 20 ln(3q+1).

1°) Déterminer le coût de fabrication de 5 objets, de 10 objets.

On arrondira le résultat au centimètre près.

2°) Quel est le nombre d'objets fabriqués sachant que le coût de production s'élève à 90,22D ?

3°) Etudier les variations de C et construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) pour q variant de 0 à 50.

4°) Chaque objet est vendu à 3 D

a) Exprimer la fonction bénéfice B en fonction de q.

b) Calculer B (5) ; B(10) ; puis B(40).

c) En utilisant le graphique, déterminer la quantité minimale d'objets que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire en supposant qu'elle vend toute sa production.