

Exercice 1 :

1/ En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a } |e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}.$$

2/ Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $h(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{t^2}$.

a) Montrer que $h(x)$ est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer $h'(x)$.

b) En déduire $h(x)$.

Exercice 2 :

On pose pour tout entier naturel n non nul : $U_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n$

0/ calcule U_0 .

1/ A l'aide d'une intégration par parties , calcule U_1

2/ A l'aide d'une intégration par parties , démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$3U_{n+1} + (n+1)U_n = e^3.$$

4/ En déduire U_2 .

5/ Démontre que pour toute entier naturel n , U_n est positive.

6/ Déduire de la question 3 que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$$

7/ En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1 / Vérifier que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Et déterminer sa fonction dérivée.

2/ En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x) = x$.



3) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Partie B

Soit $U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

1/ Calculer U_0 et U_1 .

2/ Montre que pour tout $n \geq 1$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2^n} + (2n-1) U_n \right)$$

Exercice 4 :

Soit la suite U_n définie par

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \text{ et } U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{1+n}$
2. En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3.a. Calculer U_0 et U_1

b. Exprimer U_{n-1} en fonction de U_n

c. En déduire alors : U_2 et U_3 :P

Oueslati Aymen Tél 27677722

