

Exercice 1 ☺

Dans le plan complexe P muni d'un repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixe respectives a et 1

Ou a est un nombre complexe différent de 1 . soit la fonction $f : P \setminus \{B\} \longrightarrow P$
 $M_z \longrightarrow M'_z$

Telle que $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1°) Montrer que les affixes des points invariant par f sont les solutions de l'équation

$$(E) : z^2 - 2z + a = 0$$

2°) On suppose que : $a = 1 - e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

- Résoudre l'équation (E).
- Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

3°) on note M' et M'' les points d'affixes respectives $(1 + e^{i\theta})$ et $(1 - e^{i\theta})$.

- Montrer que pour tout $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$ le triangle $OM'M''$ est rectangle en O .
- Déterminer θ pour que le triangle $OM'M''$ soit isocèle.

[- on pose $a = (-1)$

1°) Montrer que : $(z' - 1)(z - 1) = 2$

2°) a°) Montrer que : $(\vec{u}; \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 [2\pi]$

b°) Dédire que $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BM'})$.

Exercice 2 ☺

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$ on considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$

- Montrer que : $1 + 2i \sin \theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$
 - Résoudre dans \mathbb{C} , (E_θ)



2) On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + (4 - 2i \sin \theta e^{i\theta})z + 4i \sin \theta e^{i\theta}$

a) Calculer $f(2)$

b) Montrer que $f(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$ ou b et c deux nombres complexes à déterminer.

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par

A, B, et C les points d'affixes $2, 1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C

b) Montrer que OABC est un rectangle

c) Déterminer θ pour que OABC soit un carré

Exercice 3

A/1) a) Justifier que $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2}i$ et $z_D = 2\sqrt{2}i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$$z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) Vérifier que $z_B = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC) \perp (AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes

respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer z_N^3 et z_P^3 .

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à $(\alpha^3 = -2\alpha)$.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.

Exercice 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1; 1; 1)$ et $B(3; 2; 0)$;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur \vec{AB} pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB .

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. Déterminer une équation de la sphère (S) .

3. a) Calculer la distance du point A au plan (Q)
En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) .

b) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q) , noté C , a pour coordonnées $(0; 2; -1)$

a) Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q)

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)