REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques	
	Section : SCIENCES ET ECH	
	SERIE n° :3	DURE : 3H
	Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION3	

EXERCICE N°1 : (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère l'équation $(E): z^2-6z+c=0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.
   a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A=3+i\sqrt{c-9}$ et $z_B=3-i\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

EXERCICE N°2 : (6poitns)

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
   c. L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.
   a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
   b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs t et a on a
$$P_{T\geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
   a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
   b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5\,000)$.
   c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

EXERCICE N°03 : **(4poitns)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. *a.* Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE N°04 : **(6 points)**

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

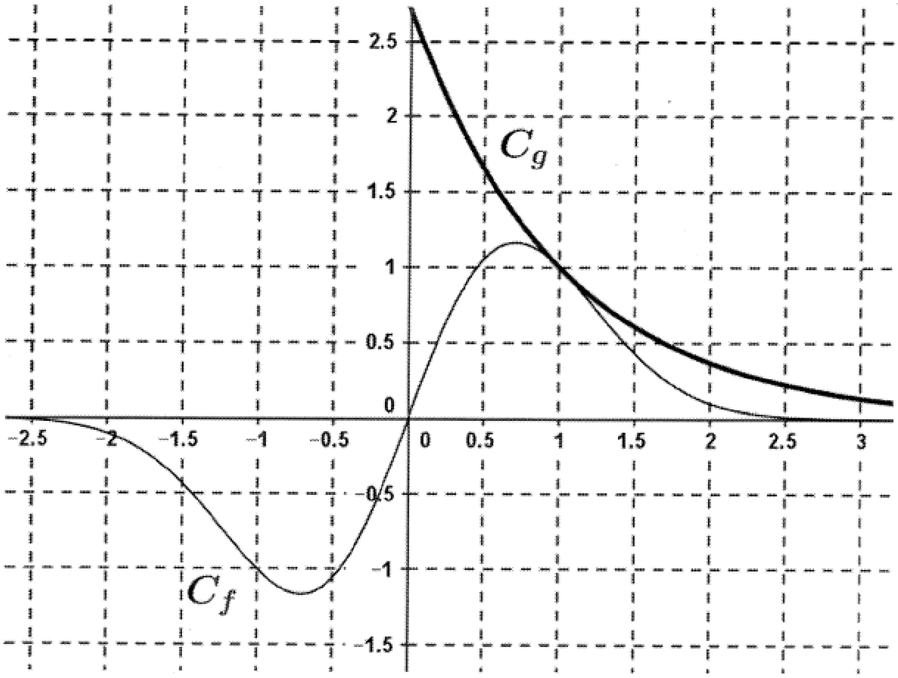
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2.
   a. On admet que f est dérivable sur **R** et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,
   $$f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

   $$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

   c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

4.

   a. La conjecture émise à la question **1.** de la partie B est-elle valide ?

   b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.

   c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.