Fiche cours NOMBRES COMPLEXES

Ce qu'il faut absolument savoir sur les nombres complexes

Forme (écriture) algébrique ou cartésienne

a et b sont deux réels $z = a + ib$ avec $i^2 = \cdots$, on a donc $i^3 = \ldots$; $i^4 = \ldots.$

$a = Re(z)$: .... ; $b = Im(z)$: ....

$z = 0 \Leftrightarrow$ .... ; $z = z' \Leftrightarrow$ ....

Le module de z est $|z| = \ldots\ldots$

Conjugué de z est $\bar{z} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{z+\bar{z}}{2} = \cdots$; $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \cdots$; $z\bar{z} = \cdots$

z est réel $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ .... ; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ ....

Soit M le point d'affixe z c-a-d le point de coordonnées $(a; b)$ dans un RON direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Un argument de z est $\arg(z) \equiv$............................

$\arg(zz') \equiv$ .... ; $\arg(\bar{z}) \equiv$ .... ; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv$............................

Forme trigonométrique ou géométrique

On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$; on a $\cos\theta = -$; $\sin\theta = -$

$\boldsymbol{z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)} \longleftarrow$ *Forme trigonométrique (ou géométrique)* .. On note $z = [r; \theta]$

Forme exponentielle $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$; $\boldsymbol{z = re^{i\theta}} \longleftarrow$ *Forme exponentielle de z*

$e^{i0} = \ldots$; $e^{i\pi} = \ldots$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = \ldots$; $e^{i(\theta+\theta')} = \ldots$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = \ldots$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \ldots$;

$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \ldots\ldots$; $\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \ldots\ldots$; $(e^{i\theta})^n = \ldots\ldots = \cos \ldots + i\sin \ldots$

Vecteurs _Soit A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C

$Aff(\overrightarrow{AB}) = Z_{\overrightarrow{AB}} = \ldots\ldots$; $AB = \ldots\ldots$; si $I = A * B$, $Z_I =$ ------------

$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}$ est réel $\Leftrightarrow$ .... ; $\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ ....

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv$ ....

APPLICATION

Dans le plan complexe, on désigne par A, B et C les points d'affixes

$$z_A = 2i, z_B = \sqrt{3} + i \text{ et } z_C = \sqrt{3} - i$$

.

Déterminer :

$$Re(z_A) = \cdots \quad ; Re(z_B) = \cdots \quad ; Re(z_C) = \cdots$$

$$Im(z_A) = \cdots \quad ; Im(z_B) = \cdots \quad ; Im(z_C) = \cdots$$

$|z_A| =$..

$|z_B| =$..

$|z_C| =$..

__Un argument de A__

On a : $\cos(\arg(z_A)) =$................................ et $\sin(\arg(z_A)) =$................................

Donc $\arg(z_A) \equiv$ ....

__Un argument de B__

....

....

__Un argument de C__

....

....

__Forme ou écriture trigonométrique et exponentielles__

$z_A =$ ....

$z_B =$ ....

$z_C =$ ....

$AB =$ ....

$BC =$ ....

$CO =$ ....

$OA =$ ....

$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

Racine carrée d'un nombre complexe

1. *Déterminer les racines carrées de* $21 + 20i$.

Soit $z = x + iy, avec\ x\ et\ y\ réels,\ tel\ que\ z^2 = 21 + 20i.$

On a donc ; $z^2 = 21 + 20i \iff (x + iy)^2 = 21 + 20i \iff$ ....

Et $|z^2| = |21 + 20i| \iff |z|^2 =$ .... $\iff$ ....

On obtient le système ;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \cdots & l_1 \\ x^2 - y^2 = \cdots & l_2 \\ 2xy = \cdots & l_3 \end{cases}$$

$l_1 + l_2$ donne ; ....

$l_1 - l_2$ donne ; ....

Or d'après l_3, $2xy = 20$ en déduit que x et y sont de ....

On en déduit donc que seulement les couples $(5; 2)$ et $(-5; -2)$ solutions du système précédent.

Ainsi les racines carrées de $21 + 20i$ sont ....

Résolution d'équation du second degré

2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 - (5 - 4i)z - 3 - 15i = 0.$

On a $\Delta =$ ....

....

Or $21 + 20i = (5 + 2i)^2$ donc ....

On note $z_1\ et\ z_2$ les solutions de l'équation.

On a : $z_1 =$ ....

Et $z_2 =$ ....

$$S_{\mathbb{R}} = \{\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\}$$

Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe

Soit $a = |a|$ où $r > 0$ et θ un argument de a.

L'équation $z^n = a$, admet dans $\mathbb{C}$, n solutions définies par :

$z_k = re^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0,1,2, \dots, n-1\}\ et\ r = \sqrt[n]{|a|}$

<u>Cas particulier si $a = 1$,</u> c-a-d $z^n = 1$

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; $k \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$, ses racines sont appelées racines nièmes de l'unité

Exemple : $z^3 = 1$, $S_{\mathbb{R}} = \left\{1;\ e^{\frac{i\pi}{3}};\ e^{\frac{i2\pi}{3}}\right\}$