ETUDE DE FONCTION

Ce qu'il faut absolument savoir en ce qui concerne l' étude de fonction

DOMAINE DE DEFINITION

Règle 1 :

« on ne peut pas diviser par zero »

c-a-d,

$\frac{1}{A(x)}$ ***est définie ssi*** $\boldsymbol{A(x) \neq 0}$

$f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est définie ssi …………………… Sig …………………, $D_f =$…………..

$f : x \to \sqrt{x^2-1}$ est définie ssi …………………

Or $x^2 - 1 = 0 \iff x = \cdots \quad ou\, x = \cdots$

x	
x^2-1	

Ainsi $D_f =$…………………

Règle 2 :

$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ est définie ssi …………………

Etudions le signe de $\frac{x+1}{x}$ *, or* $x+1=0 \Leftrightarrow x = \cdots$

x	
x	
$x+1$	
$\frac{x+1}{x}$	

Ainsi $D_f =$…………..

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ est définie ssi …………………………

Etudions le signe de x^2+x+1,

or $x^2+x+1=0$*, on a* $\Delta =$ *……… avec* $0^2+0+1=1>0$

donc $\forall x \in IR, x^2+x+1 \ldots 0$ *, Ainsi* $D_f =$………..

$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ est définie ssi ………………. sig ……….. donc $D_f =$…………..

$f : x \mapsto \frac{2+x}{|x+1|-1}$ est définie ssi ……………… Sig ………………… sig …………………..

Donc $D_f =$…………………

$f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)-1}$ est définie ssi ……………… Sig ……………… Sig $x \neq$ ………..

Ainsi $D_f =$…………………

ASYMPTOTES

1) $D : x = a$ est une **asymptote verticale** à $C_f \iff \lim\limits_{x \mapsto a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Si f n'est pas définie en a, on peut penser à une asymptote verticale.

2) $D' : y = b$ est une **asymptote horizontale** à $C_f \iff \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} f(x) = b$

3) $D' : y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $C_f \iff \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} [f(x) - y] = 0$

Si $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$,

Les valeurs de a et b sont calculés avec les formules suivantes :

$a = \lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x \mapsto \infty} [f(x) - ax]$

Déterminer tous les asymptotes à la courbe (C) de la fonction $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

f est définie ssi ………………. sig …………….

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) =$ ……………………………………………………………………

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) =$ ……………………………………………………………………

Graphiquement, (C) *admet une asymptote ……………. d'équation ……….*

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) =$ …………………………………………………………………

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) =$ …………………………………………………………………

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} =$ ……………………………………………………………………

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [f(x) - 2x] =$ ……………………………………………………………

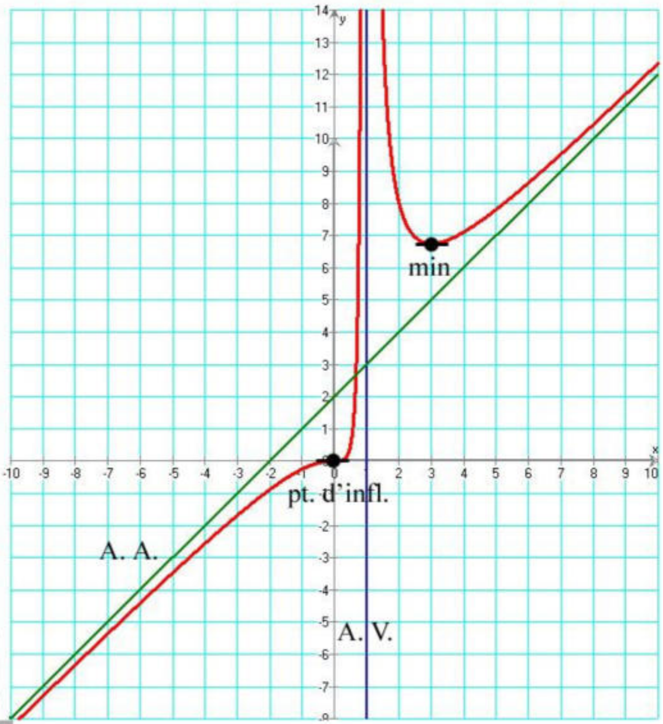
$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \text{..}$$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} [f(x) - 2x] = \text{...}$$

Graphiquement, la courbe (C) admet une asymptote ....d'équation .... au voisinage de ....

EXEMPLE COMPLET

Etudions la fonction $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ dont ci-dessous sa représentation graphique dans un repère orthonormé.



Domaine de définition :
....

Asymptote verticale : $x = 1$, en effet ;
....
....

Asymptote oblique : $y = x + 2$, en effet ;
....

....

TABLEAU DE VARIATION

- <u>Dérivée :</u> $\forall x \in D_f, f'(x) =$ ....

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- <u>Signe de $f'(x)$:</u>

$f'(x) = 0 \iff$ ....

Le signe de $f'(x)$ est celle du .... de signes de .... et ....

$x - 3 = 0 \iff$ .... et $x - 1 = 0 \iff$ ....

x				
x^2				
$x-1$				
$x-3$				
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$				

Point d'inflexion :

Le point $A(a;b)$ est dit point d'inflexion pour la courbe (C) d'une fonction si :

- **$f''(a)=0$ et f'' change de signe.**

x		a
$f''(x)$	$-$ $+$	$+$ $-$

ou

- **$f'(a)=0$ et f' ne change pas de signe.**

x		a
$f'(x)$	$+$ $-$	$+$ $-$

POINT D'INFLEXION

$f'(0)=0$, et le signe de $f'(x)$ ne change pas autour de 0. Donc le point $I(0;f(0))=(0;0)$ est un point d'inflexion pour (C).

La tangente T en I est d'équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=0$

On peut aussi montrer que $I(0;0)$ est un point d'inflexion pour (C) en calculant la dérivée seconde f'' de f. En effet ;

$\forall x\in D_f,\ f''(x)=$ ....

$$=\frac{6x}{(x-1)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow$ .... et $(x-1)^3=0 \Leftrightarrow$ ....

Rq: le signe de $f''(x)$ est celle du produit de signes de $2x$ et $(x-1)^3$

x			
$2x$			
$(x-1)^3$			
$f''(x)$			

TABLEAU DE VARIATION

Dans chaque cas, calculer la dérivée f' de la fonction f, déterminer son signe sur l'intervalle I et tracer le tableau de variation de f.

- $f(x)=x^2-32\sqrt{x}+31\quad ,I=]0;+\infty[$

$f'(x)=$ ....

$$=\frac{2(\sqrt{x}^3-2^3)}{\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ ....

Si $0<x\le 4$ on a ....

....

x	0	$+\infty$
$x\sqrt{x}-8$		
$f'(x)$		
$f(x)$		

- $f(x)=\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\quad ,I=]0;2[$

$f'(x)=$ ....

$= \frac{2(2-\sqrt{4-x^2})}{x\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ ....

Etudions le signe de $2-\sqrt{4-x^2}$.

$x \in]0;2[$, $0 < x < 2$ *Sig* ....

Sig...

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

- $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $I = \mathbb{R}$

$f'(x) =$ ....

$= \frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}\,(x^2+x+1)}$

....

....

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

-

0

Etudier les fonctions suivantes selon l'exemple précédent.

1. $f(x) = \frac{-3x+4}{2x+3}$
2. $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ aide : $f''(x) = \frac{-8(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}$
3. $f(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$ aide : $f''(x) = \frac{6(4-x)}{(x-2)^4}$
4. $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$
5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.