

Sujet n° 1

EXERCICE 1 :

1) Mettre sous forme exponentielle chacun des complexes suivants :

$$z_1 = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})^4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = -i \cdot \frac{z_1}{z_1}$$

2) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles $(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})^n \in i \cdot \mathbb{R}$

EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $a = \sqrt{3} + i$, $b = i\sqrt{3} - 1$ et $c = a + b$.

- 1) a) Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle \mathcal{C} de centre O dont on précisera le rayon.
b) Construire alors les points A, B et C.
- 2) Ecrire chacun des complexes a et b sous forme exponentielle.
- 3) a) Montrer que OACB est un carré.
b) En déduire la forme exponentielle de c.
- 4) a) Déterminer les racines cubiques c_0, c_1 et c_2 du nombre complexe c.
b) Montrer que $c_0 + c_1 + c_2 = 0$

EXERCICE 3 :

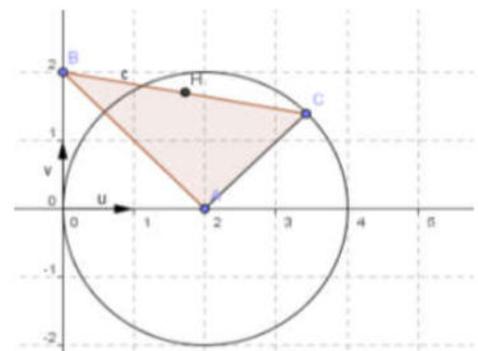
I/ On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 2(1 + i)z + 4i = 0$

- 1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure notée z_1
b) En déduire l'autre solution qu'on notera z_2 .

2) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E') : $i \cdot \bar{z}^4 - 2(1 + i) \left(e^{i\frac{\pi}{8}} z \right)^2 + 4i = 0$

II/ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 2$ et $z_B = 2i$.

On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 2. Soit le point C du cercle \mathcal{C} d'affixe z_C tel que le triangle ABC soit rectangle en A. Le point H étant le milieu de [BC].



- 1) a) Déterminer graphiquement $|z_C - z_A|$ et $\arg(z_C - z_A)$
 - b) En déduire que $z_C = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$
 - c) Donner alors la forme exponentielle de z_C .
- 2) Montrer que $z_H = (1 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis calculer OH.
- 3) Soit le point M du plan d'affixe $z_M = 2 + 2e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi]$
 - a) Déterminer l'ensemble des points M du plan quand θ décrit $[0, \pi]$.
 - b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle $(AM) \perp (OC)$

EXERCICE 4 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit les points A(1) et B(-2i). Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M(z) dans chacun des cas suivants :

- 1) $|iz - 2| = |\bar{z} - 1|$
- 2) $\left|\frac{z+2i}{z-1}\right| = 1$
- 3) $\frac{z+2i}{z-1} < 0$
- 4) $\frac{iz-2}{z-1} \in \mathbb{R}$
- 5) $\arg\left(\frac{z+2i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- 6) $\bar{z} = 2i + 3e^{i2\theta}$ tel que θ décrit $[0, \pi]$

EXERCICE 5 :

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = -\ln(1 - \tan x)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- 2) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe (C).
- 3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.
 - b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{2e^{2x} - 2e^x + 1}$
- 4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
 - b) Montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente.
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

