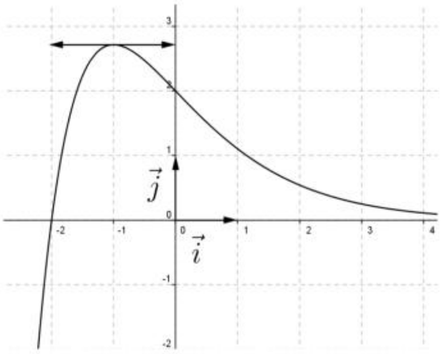
Sujet n°2

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x) = -ln(1 - tanx)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right[$
2) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe (C).
3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.
   b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{2e^{2x}-2e^x+1}$
4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right[$.
   b) Montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

EXERCICE 2 :



On a représenté ci-contre dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

- La courbe (C) admet au v$(-\infty)$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au v$(+\infty)$.

1) Par une lecture graphique déterminer :
   $f(0)$, $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
2) Montrer que $f'(0) = -1$. En déduire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0
3) a) Montrer que $f(-1) = e$
   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équation : $x = -1$ et $x = 0$.
4) a) Montrer que la fonction $u : x \longmapsto xe^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$
   c) Montrer qu'une fonction g dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si $(g - u)$ est solution de (E_0)
   d) Déterminer alors la fonction f.

EXERCICE 3 : « Bac session principale 2017 »

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{e^x-1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x-1 \le \sqrt{e^x-1}$, si et seulement si, $x\le\ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(\ln 2\ ,\ 1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x :\mapsto e^x-1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x}=1$.

6) On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x)=2\left(f(x) - (g^{-1}\circ f)(x)\right)$.

a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $F'(x)=G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $F(x)=G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que $A=1+\ln 2-\dfrac{\pi}{2}$.

7) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $\left[\ln(n), +\infty\right[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $\left[\ln(n), +\infty\right[$ par $G_n(x) = 2\left(f_n(x) - \sqrt{n}\, g^{-1}\left(\dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Montrer que pour tout $x \in \left[\ln(n), +\infty\right[$, $\quad G_n(x) = \displaystyle\int_{\ln(n)}^{x} f_n(t)\, dt$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

En déduire que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\quad f_n(x) \leq e^x - 1$.

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - 1$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} A_n$.