

### Exercice 1 : 2008 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

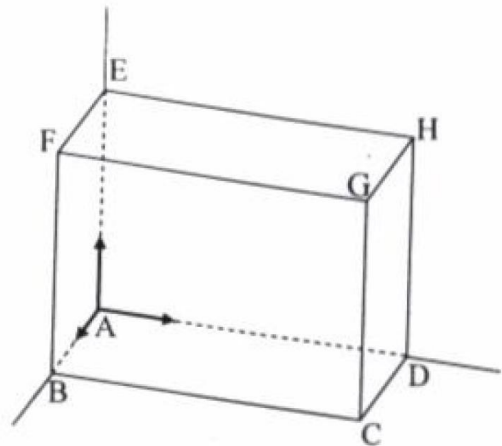
On considère les points  $A(3,2,6)$  ;  $B(1,2,4)$  et  $C(4,-2,5)$ .

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .
- b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.
  
- 2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).  
Montrer que  $OH = \frac{4}{3}$ .
  
- 3) Soit S la sphère de centre O et passant par A.
  - a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle  $\mathcal{C}$  de centre H.
  - b) Calculer le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 2 : 2009 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que  $\overline{AB} = 2\vec{i}$  ;  $\overline{AD} = 4\vec{j}$  et  $\overline{AE} = 3\vec{k}$ .

- 1) a) Vérifier que  $\overline{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ .
- b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs  $\overline{EB}$  ;  $\overline{EG}$  et  $\overline{EB} \wedge \overline{EG}$ .
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
  
- 2) Soit  $\alpha$  un réel différent de 1 et M le point de coordonnées  $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$ .
  - a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.
  - b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).
  
- 3) Soit  $\nu$  le volume du tétraèdre MEBG.
  - a) Exprimer  $\nu$  en fonction de  $\alpha$ .
  - b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.
  - c) Pour quelles valeurs de  $\alpha$ ,  $\nu$  est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?



### Exercice 3 : 2010 pr

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  et  $C(1, -1, 1)$ .

- 1) a) Déterminer  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ . En déduire que les points A, B et C déterminent un plan  $\mathcal{P}$ .  
b) Montrer qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est  $x + y + z - 1 = 0$ .
- 2) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{E}$  tels que :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$ .  
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.  
b) Montrer que  $S \cap \mathcal{P}$  est le cercle circonscrit au triangle ABC.
- 3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.  
b) Soit  $\alpha$  un réel et soit M un point de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(\alpha, 0, 2 - \alpha)$ .

Montrer que, lorsque  $\alpha$  décrit l'ensemble  $\mathbb{R}$ , le volume du tétraèdre MABC reste constant.

### Exercice 4 : 2014 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la sphère (S) d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$  et le plan P d'équation  $x + 2y + z - 6 = 0$ .

- 1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).  
b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
- 2) On donne les points  $A(2, 0, 2)$  et  $B(2, 2, 0)$ .  
a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle (C).  
b) Soit Q l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $MA = MB$ .

Montrer que Q est le plan d'équation  $y = z$ .

- c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite  $\Delta$  dont une représentation

$$\text{paramétrique est } \begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- 3) Déterminer un point C du cercle (C) tel que ABC est un triangle équilatéral.



### Exercice 5 : 2015 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1,1,0)$ ,  $B(1,-1,2)$ ,  $C(0,1,1)$  et  $D(1,1,4)$ .

1/ a) Montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan qu'on notera  $(P)$ .

b) Justifier que  $(P)$  est d'équation  $x + y + z - 2 = 0$ .

c) Vérifier que  $D$  n'appartient pas au plan  $(P)$ .

2/ Soit  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $H$  le milieu du segment  $[AB]$ .

a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

b) En déduire que  $H$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$ .

3/ Soit  $\Delta$  la droite perpendiculaire au plan  $(P)$  passant par le point  $H$ .

Justifier qu'une représentation paramétrique de  $\Delta$  est 
$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

4/ Soit  $M$  un point de  $\Delta$ .

a) Justifier que  $MA = MB = MC$ .

b) Montrer qu'il existe un unique point  $I$  de  $\Delta$  tel que  $IA = ID$ .

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  appartiennent à une même sphère  $(S)$  dont on précisera le centre et le rayon.

### Exercice 6 : 2016 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- 1) Soit P et Q les plans d'équations respectives  $x+y-z-5=0$  et  $x+y-z+7=0$ .  
Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.
- 2) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$ .
  - a) Justifier que S est la sphère de centre  $I(1, 2, 1)$  et de rayon  $R = \sqrt{5}$ .
  - b) Montrer que  $P \cap S$  est un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $J(2, 3, 0)$  dont on déterminera le rayon.
  - c) Déterminer  $Q \cap S$ .
- 3) On donne les points  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, 2)$  et  $C(2, 2, 5)$ .
  - a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .
  - b) Montrer que pour tout point  $M(x, y, z)$  de l'espace,  $(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM} = 2(x + y - z + 1)$ .
- 4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

### Exercice 7 : 2017 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(0, -2, 4)$  et  $C(2, 0, -4)$ .

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{OB} \wedge \overline{BC}$ .
  - b) On note P le plan (OBC).  
En remarquant que  $\overline{OB} \wedge \overline{BC} = 4 \overline{OA}$ , justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O.
  - c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à  $\sqrt{2}$ .
- 2) Soit (S) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que :  
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0$ .  
Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon  $\sqrt{11}$ .
- 3) a) Calculer la distance OA.
  - b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$ .
  - c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C).
- 4) On considère le point  $H(1, -1, 0)$ .
  - a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C).
  - b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.



### Exercice 8 : 2014 co

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère l'ensemble

(S) des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ .

1) Montrer que (S) est la sphère de centre le point  $I(1, -1, 0)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

2) Soit  $\Delta$  la droite passant par le point  $A(0, 0, 3)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$ .

b) Montrer que l'intersection de  $\Delta$  et (S) est vide.

3) Soit B le point de coordonnées  $(3, 0, 0)$ .

a) Justifier que le point B et la droite  $\Delta$  déterminent un plan P.

b) Montrer que P a pour équation cartésienne  $x + y + z - 3 = 0$ .

c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

### Exercice 9 : 2015 co

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la sphère (S)

d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ .

1/ Justifier que (S) est de centre le point  $I(1, -1, 0)$  et de rayon 5.

2/ Soit le point  $J(-1, 1, 1)$  et soit (P) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $\vec{JI} \cdot \vec{JM} = 0$ .

a) Justifier que (P) est le plan d'équation  $2x - 2y - z + 5 = 0$ .

b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point  $A(-5, 5, 3)$  et (S') la sphère de centre A et de rayon  $2\sqrt{13}$ .

a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

b) Montrer que  $AJ = 6$ .

4/ Soit M un point du cercle (C).

a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

b) En déduire que  $AM = 2\sqrt{13}$ .

c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).



### Exercice 10 : 2016 co

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

Soit OADBCEFG le cube tel que  $\vec{OA} = \vec{u}$ ,  $\vec{OB} = \vec{v}$  et  $\vec{OC} = \vec{w}$ .

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].

1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que  $\vec{OI} \wedge \vec{OJ} = \frac{1}{4} (\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$ .

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

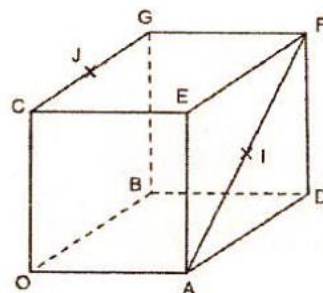
b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les coordonnées de H, justifier que  $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .

3) Soit (S) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$ .

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).



### Exercice 11 : 2017 co

#### Exercice 1 (5 points)

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que  $A(3,0,0)$  ;  $C(0,3,0)$  et  $G(0,0,3)$ .

1) a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point  $\Omega$  milieu de [CD].

2) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AE} \wedge \vec{AG}$ .

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG.

3) On désigne par P le plan passant par les points A, E et G.

a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

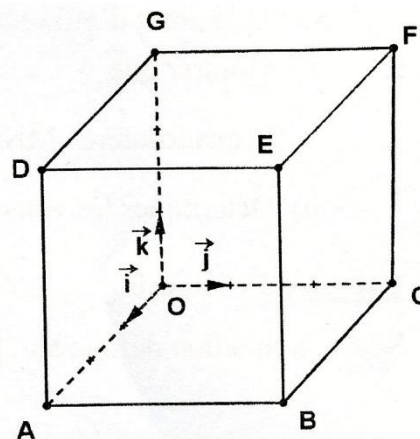
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est  $x - y + z - 3 = 0$ .

4) Soit (S) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace

tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.



## Exercice 12 : 2018 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1/ Soit le plan Q d'équation  $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$ .

Montrer que le plan Q coupe les axes  $(O, \vec{i})$ ,  $(O, \vec{j})$  et  $(O, \vec{k})$  respectivement aux points  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  et  $C(0, 0, \sqrt{2})$ .

2/ Soit la sphère (S) d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont tangents et déterminer leur point de contact.

3/ Soit a un réel strictement positif. On considère les points  $M(a, 0, 0)$  et  $N(0, \frac{4}{a}, 0)$ .

Déterminer en fonction du réel a, les composantes du vecteur  $\vec{CM} \wedge \vec{CN}$ .

4/ a) Montrer qu'une équation du plan (CMN) est  $4x + a^2y + 2a\sqrt{2}z - 4a = 0$ .

b) Soit d la distance du point O au plan (CMN). Montrer que  $d = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$ .

c) En déduire la valeur du réel a pour laquelle la distance d est maximale.

5/ a) Montrer que pour tout réel  $a > 0$ , le volume du tétraèdre OCMN est égal à  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

b) En déduire que pour tout réel  $a > 0$ , l'aire du triangle CMN est supérieure ou égale à  $2\sqrt{2}$ .

c) Identifier les points M et N pour lesquels l'aire du triangle CMN est égale à  $2\sqrt{2}$ .



# Correction



Corrigé d'exercice N°1 : 2008 pr

$$1) a) \text{ On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{N} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b)  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) On désigne par  $\mathcal{V}$  le volume du tétraèdre OABC .

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\vec{N} \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{1}{6} |24 + 8 - 48| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ (unités de volume).}$$

Autrement:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})|$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -44 + 28 = -16$$

$$2) \mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{B} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{B} \cdot OH \text{ où } \mathcal{B} \text{ est l'aire de la base ABC.}$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{N}\| = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 16 + 64} = 6 \text{ (unités d'aire)}$$

$$OH = \frac{3 \cdot \mathcal{V}}{\mathcal{B}} = \frac{3 \cdot \frac{8}{3}}{6} = \frac{4}{3}$$

**Autrement:**  $\vec{N} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $P = (ABC)$ .

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow -8(x-3) - 4(y-2) + 8(z-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 2z + 4 = 0$$

$$OH = d(O, P) = \frac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3}$$

3) a)  $d(O, P) = \frac{4}{3}$  et  $R = OA = \sqrt{9+4+36} = 7$ .

$d(O, P) < R \Rightarrow S \cap P = (C)$  où (C) est le cercle de centre H.

b) Si  $r$  est le rayon du cercle (C) alors:  $r = \sqrt{49 - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{\sqrt{425}}{3} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$

### Corrigé d'exercice N°2 : 2009 pr

$A(0, 0, 0)$ ;  $B(2, 0, 0)$ ;  $D(0, 4, 0)$ ;  $E(0, 0, 3)$ .

1) a-  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ .

b-  $\overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

c-  $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$  est un vecteur normal du plan (EBG),

donc une équation cartésienne du plan (EBG) est de la forme :  $12x - 6y + 8z + d = 0$

et comme  $E \in (EBG)$  donc  $24 + d = 0$  signifie  $d = -24$ .

**Conclusion :** Une équation du plan (EBG) est :  $6x - 3y + 4z - 12 = 0$ .

2) a- Soit  $\alpha$  un réel différent de 1 et  $M(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$ .

$$\overrightarrow{AM} = 2\alpha\vec{i} + 4\alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = \alpha\overrightarrow{AG} \quad \text{et } \alpha \neq 1 \text{ donc } M \in (AG) \text{ et } M \neq G.$$

b- On a :  $12\alpha - 12\alpha + 12\alpha - 12 = 12(\alpha - 1) \neq 0$  car  $\alpha \neq 1$  donc  $M$  n'appartient pas au plan (EBG).

**Autrement** :  $A \notin (EBG)$  donc  $(AG) \not\subset (EBG)$  de plus  $(AG) \cap (EBG) = \{G\}$  et comme  $M$  décrit la droite (AG) privé du point G donc  $M \notin (EBG)$

3) a-  $V$  = le volume du tétraèdre MEBG .

$$V = \frac{1}{6} | (\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EM} | \quad \text{or } \overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 3\alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{6} | 24\alpha - 24\alpha + 24(\alpha - 1) | = 4 | \alpha - 1 |.$$

b- Le volume du tétraèdre AEBG est égal au volume du tétraèdre MEBG pour  $M = A$  c'est à dire pour, donc il est égal à 4.

c- Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal à  $2 \times 4 \times 3 = 24$

$V$  est égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH signifie  $4 | \alpha - 1 | = 24$

signifie  $| \alpha - 1 | = 6$  signifie  $\alpha = 7$  ou  $\alpha = -5$ .

### Corrigé d'exercice N°3 : 2010 pr

$$1^\circ) a^\circ) \text{ On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  alors  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés et définissent donc un plan  $(\mathcal{P})$ .

1°) b°) Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC) = (\mathcal{P})$ , d'où :

$$(\mathcal{P}) : x + y + z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

L'écriture  $A(1, 0, 0) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$  permet alors de conclure :

$$(\mathcal{P}) : x + y + z - 1 = 0.$$

**Note** : Méthode alternative 2 acceptable : Vérifications  $A \in (\mathcal{P})$ ,  $B \in (\mathcal{P})$  et  $C \in (\mathcal{P})$ .

**Note** : Méthode alternative 3 acceptable : Coplanarité de  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  :  $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \dots$

2°) a°) On a la réduction :

$$(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{S}): (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

On en déduit que l'ensemble  $(\mathcal{S})$  est une sphère de centre  $I(1,0,1)$  et de rayon  $R=1$ .

**Note**: Méthode alternative acceptable: Formule  $h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d \dots$

2°) b°) Il suffit de montrer que les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent à la sphère  $(\mathcal{S})$ .

On a  $(1-1)^2 + 0^2 + (0-1)^2 = 1$ , d'où  $A \in (\mathcal{S})$ .

On a  $(0-1)^2 + 0^2 + (1-1)^2 = 1$ , d'où  $B \in (\mathcal{S})$ .

On a  $(1-1)^2 + (-1)^2 + (1-1)^2 = 1$ , d'où  $C \in (\mathcal{S})$ .

**Note**: Méthode alternative acceptable :

Calcul de distances ... puis le reste ... :  $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $d < r$ ,  $H\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ,  $AH = BH = CH$ , ...

3°) a°) Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  étant précédemment déterminé, on utilise la formule :

$$v(IABC) = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \right|$$

Le calcul  $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ainsi que le calcul du produit scalaire donne  $v(IABC) = \frac{1}{6}$  ( $uv$ )

3°) b°) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 0 \\ 2-\alpha \end{pmatrix}$  et

$$v(MABC) = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \right| = \frac{1}{6} |(\alpha-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (2-\alpha) \cdot 1| = \frac{1}{6} \text{ indépendant de } \alpha$$

**Note**: La valeur de cette constante n'est pas exigée, en effet :

Méthode alternative 2 acceptable : parallélisme donc hauteur constante donc volume constant .

### Corrigé d'exercice N°4 : 2014 pr

1) a)  $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$  donc  $S$  est une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

b)  $d(O,P) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$  donc  $P$  coupe  $S$  suivant un cercle de rayon

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2}$  et de centre  $I$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $P$ .

Soit  $D$  la droite perpendiculaire à  $P$  passant par  $O$  donc  $D : \begin{cases} x = t \\ y = 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

$$I(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ 6t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ il en résulte que } I(1,2,1).$$

$$2) \text{ a) } \begin{cases} 2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 0 \\ 2 + 0 + 2 - 6 = -2 \neq 0 \end{cases} \text{ donc } A \in S \text{ et } A \notin P.$$

$$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 0^2 - 8 = 0 \\ 2 + 4 + 0 - 6 = 0 \end{cases} \text{ donc } B \in S \text{ et } B \in P \text{ donc } B \text{ appartient à } (\mathcal{C}).$$

$$b) M(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow y = z.$$

$$c) \vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ donc } P \text{ et } Q \text{ sont sécants suivant une droite } \Delta : \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}, \text{ on pose}$$

$$y = \alpha \in \mathbb{R}, \text{ on aura } \Delta : \begin{cases} x = -3\alpha + 6 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

3) ABC est équilatéral si et seulement si  $CA = CB = AB$ .

$CA = CB$  donc C est un point de Q et C appartient à  $(\mathcal{C})$  qui est contenu dans P donc C est un point de  $\Delta$ , il en résulte qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $C(-3\alpha + 6, \alpha, \alpha)$ .

Ainsi pour que ABC soit équilatéral, il suffit que  $CA = AB \Leftrightarrow CA^2 = AB^2 \Leftrightarrow$

$$(4 - 3\alpha)^2 + \alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = \frac{6}{11}. \text{ soit } C(0, 2, 2).$$

### Corrigé d'exercice N°5 : 2015 pr

$$1/ \text{ a) } \overline{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \text{ donc les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés par suite ils}$$

déterminent un plan.

$$b) 1 + 1 + 0 - 2 = 0 \text{ donc } A \in (P).$$

$$1 - 1 + 2 - 2 = 0 \text{ donc } B \in (P).$$

$$0 + 1 + 1 - 2 = 0 \text{ donc } C \in (P).$$

Il en résulte que  $x + y + z - 2 = 0$  est une équation de (P).

$$c) 1 + 1 + 4 - 2 = 2 \neq 0 \text{ donc } D \notin (P).$$

$$2/ \text{ a) } \overline{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{CA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{CB} \cdot \overline{CA} = 1 - 1 = 0 \text{ donc } \overline{CB} \perp \overline{CA} \text{ par suite le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C.$$

b) le triangle ABC est rectangle en C et  $H = A * B$  donc c'est le centre du cercle  $\mathcal{C}$ .

$$3/ \text{ Le vecteur } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un normal à } (P) \text{ donc il est directeur de } \Delta \text{ de plus le point } H = A * B \text{ donc } H(1, 0, 1), \text{ on}$$

$$\text{en déduit qu'une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}.$$



4/ a) Le point H est le centre du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle ABC et  $\Delta$  est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite  $\Delta$  est l'axe du cercle  $\mathcal{C}$  et puisque M est un point de  $\Delta$  donc  $MA = MB = MC$ .

Ou bien :  $M \in \Delta$  donc  $M(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$ .

$$\begin{cases} MA^2 = \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 \\ MB^2 = \alpha^2 + (\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 \text{ donc } MA = MB = MC. \\ MC^2 = (\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 \end{cases}$$

b)  $I \in \Delta$  donc  $I(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$   $IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow$

$$(\alpha + 1)^2 = (\alpha - 3)^2 \Leftrightarrow \alpha = 1, \text{ il en résulte qu'il existe un unique point } I(2, 2, 2) \text{ de } \Delta \text{ tel que } IA = ID.$$

c) Le point  $I \in \Delta$ , d'après a) et b),  $IA = IB = IC = ID$ , il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon  $IA = \sqrt{5}$ .

### Corrigé d'exercice N°6 : 2016 pr

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $-5 \neq 7$  alors ils sont strictement parallèles.

2) a)  $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$ . Il en résulte que S est la sphère de centre  $I(1, 2, 1)$  et de rayon  $R = \sqrt{5}$ .

b)  $d(I, P) = \sqrt{3} < R$ , on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$

et puisque  $J \in P$  et  $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le

centre de  $\mathcal{C}$ .

c)  $d(I, Q) = 3\sqrt{3} > R$ , on en déduit que  $S \cap Q = \emptyset$ .

3) a)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  donc  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

b) Soit  $M(x, y, z)$ .

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}, \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM} = 2x + 2y - 2z + 2 = 2(x + y - z + 1).$$

$$4) \begin{cases} M \in S \\ V_{(ABCM)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM}| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6} |2(x + y - z + 1)| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ x + y - z - 5 = 0 \text{ ou } x + y - z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (S \cap P) \cup (S \cap Q) \Leftrightarrow M \in S \cap P = \mathcal{C}$$



### Corrigé d'exercice N°7 : 2017 pr

De quoi s'agit-il ?

- Produit vectoriel dans l'espace
- Droites et plans de l'espace
- Sphère, positions relatives d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère
- Droite tangente à un cercle

$$1^{\circ}) \text{ a) } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 8\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } O \in P \cap (OA) \quad \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$  est un vecteur normal de P, or  $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{OA}$ , donc  $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{OA}$  sont

colinéaires, d'où  $\overrightarrow{OA} \perp P$   $\textcircled{2}$

d'après  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$  ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

$$\text{c) On a : } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ainsi,}$$

$$d(O, (BC)) = \frac{\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2}} = \sqrt{2}.$$

$$2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0 \text{ signifie } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$$

$$\text{signifie } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 11 > 0$$

Donc (S) est la sphère de centre A(2,2,1) et de rayon R =  $\sqrt{11}$ .



- 3) a)  $OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ .
- b) D'après la question 1-b), O est le projeté orthogonal de A sur le plan P, donc  $d(A,P) = OA = 3 < R = \sqrt{11}$ .  
Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon  $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\sqrt{11}^2 - 3^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$ .
- c)  $(BC) \subset P$  ;  $C \subset P$  et  $d(O, (BC)) = \sqrt{2}$  donc (BC) est tangente au cercle C.
- 4) a) On a :  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ , d'où  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BH}$ ,  
donc  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BH}$  sont colinéaires, ainsi  $H \in (BC)$  (\*).  
 $OH = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} = r$  (\*\*).  
D'après (\*) et (\*\*), on conclut que  $(BC) \cap C = \{H\}$ .

### Corrigé d'exercice N°8 : 2014 cor

- 1)  $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$  donc (S) est la sphère de centre I(1,-1,0) et de rayon  $\sqrt{3}$ .
- 2) a)  $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$
- b)  $M(x,y,z) \in (S) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ t^2 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$  or l'équation
- $t^2 - 2t + 4 = 0$  n'a pas de solution car  $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 > 0$  donc  $\Delta \cap (S) = \emptyset$ .
- 3) a)  $B \notin \Delta$  donc B et  $\Delta$  déterminent un plan P.  
b)  $0+0+3-3=0$  donc le point A appartient au plan d'équation  $x+y+z-3=0$ .  
 $3+0+0-3=0$  donc le point B appartient au plan d'équation  $x+y+z-3=0$ .  
Soit C(1,-1,3) un point de  $\Delta$  différent de A et  $1-1+3-3=0$  donc le point C appartient au plan d'équation  $x+y+z-3=0$  et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P à pour équation  $x+y+z-3=0$ .



c)  $d(I,P) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$  donc P et S sont tangents en H, projeté orthogonal de I sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc  $D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

$H(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ 3\alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ , il en résulte que  $H(2,0,1)$ .

### Corrigé d'exercice N°9 : 2015 cor

1/  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$ . Il en résulte que (S) est la sphère de centre  $I(1,-1,0)$  et de rayon  $R = 5$ .

2/ a)  $\vec{JI} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{JM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$ .  $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{JI} \cdot \vec{JM} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z + 5 = 0$ . Il en résulte que (P) est le plan d'équation  $2x - 2y - z + 5 = 0$ .

b)  $d(I,P) = \frac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 < 5$  donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$  et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or  $J \in (P)$  et  $\vec{JI}$  est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a)  $\vec{AI} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{JI} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  donc  $\vec{AI} = 3\vec{JI}$  par suite les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{JI}$  sont colinéaires, d'où  $A \in (IJ)$ .

b)  $AJ = \sqrt{16+16+4} = 6$ .

4/ a) On sait que  $\begin{cases} A \in (IJ) \\ (IJ) \perp (P) \text{ en } J \\ M \in (C) \subset (P) \end{cases}$  il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b)  $AM = \sqrt{AJ^2 + JM^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$ .

c) Pour tout M du cercle (C),  $AM = 2\sqrt{13}$  donc  $M \in (S')$ , il en résulte que  $(C) \subset (S')$  et puisque  $(C) \subset (P)$ , on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

## Corrigé d'exercice N°10 : 2016 cor

### Exercice 1

1) a)  $E(1,0,1)$ ,  $I\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et  $J\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ .

b)  $\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , il en résulte que  $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$ .

2) a)  $A_{OIJ} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ}\| = \frac{\sqrt{21}}{8}$ .

b)  $\overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $V_{OIJ} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ}) \cdot \overrightarrow{OE}| = \frac{1}{8}$ .

c) La distance EH est la longueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or  $V_{OIJ} = \frac{1}{3} \times A_{OIJ} \times EH$  donc  $EH = \frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .

3)  $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{7}$ . Il en résulte que S est la sphère de centre  $E(1,0,1)$

et de rayon  $R = \frac{\sqrt{21}}{7}$ . Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que

$d(E, (OIJ)) = EH = \frac{\sqrt{21}}{7} = R$ , on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.

## Corrigé d'exercice N°11 : 2017 cor

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

1°) a)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ . Ainsi  $E(3,3,3)$ .

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$ . Ainsi  $D(3,0,3)$ .

b)  $\Leftrightarrow \Omega = C * D$  signifie  $\Omega \left( \frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2} \right)$  donc  $\Omega \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ .



$$2) \text{ a) } \overline{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overline{AG} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overline{AE} \wedge \overline{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } V_{(O A E G)} = \frac{1}{6} |(\overline{AE} \wedge \overline{AG}) \cdot \overline{AO}| \text{ avec } \overline{AO} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} |-27 + 0 + 0| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

$$3) \text{ a) } \overline{AE} \wedge \overline{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de P et } \overline{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (CD)$$

Donc  $\overline{AE} \wedge \overline{AG} = 3\overline{CD}$ , d'où  $\overline{AE} \wedge \overline{AG}$  et  $\overline{CD}$  sont colinéaires, ainsi  $P \perp (CD)$ .

$$\text{b) Soit } P': x - y - z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 0 + 0 - 3 = 0 \text{ donc } A \in P'.$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3 + 3 - 3 = 0 \text{ donc } E \in P'.$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 + 3 - 3 = 0 \text{ donc } G \in P'.$$

Or  $(AEG) = P = P'$ , ainsi  $P: x - y + z - 3 = 0$ .

$$\text{Autrement: } \overline{AE} \wedge \overline{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de P, donc } P: 9x - 9y + 9z + d = 0,$$

$$\text{Or } A(3,0,3) \in P \text{ signifie } 9 \times 3 - 9 \times 0 + 9 \times 3 + d = 0 \text{ signifie } d = -27$$

$$\text{Donc } P: 9x - 9y + 9z - 27 = 0 \text{ signifie } P: x - y + z - 3 = 0.$$

$$4) \text{ a) } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

$$\text{signifie } (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{signifie } (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Ainsi (S) est une sphère de centre  $\Omega \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{b) } \Omega \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), P: x - y + z - 3 = 0 \text{ donc } d(\Omega, P) = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$d(\Omega, P) = R$ . Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit  $H(x, y, z)$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur P.



$$\text{Signifie } \left\{ \begin{array}{l} H \in P \\ H \in D \left( \Omega, \vec{n}_p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right. \text{ signifie } \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{array} \right. \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{signifie } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} + \alpha - \frac{3}{2} + \alpha + \frac{3}{2} + \alpha - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{array} \right. \text{ signifie } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right. \quad \text{Ainsi } H(2,1,2)$$