

Exercice1 :

Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 2}{4x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

Exercice2 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \begin{cases} 3x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \in]-1, 0] \\ 1 + 2\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en 0 et en -1 .2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x]$.3. Vérifier que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a : $1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{4}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ 5. Montrer que l'équation $f(x) = -4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $] -2, -1[$.**Exercice3 :**

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R}^+ . On sait que la droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$. Γ admet deux autres asymptotes les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 1$.

1. Par une lecture graphiquea. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x)$.b. Dresser le tableau de variation de f .c. Résoudre les équations $f(x) = -1$ et $f(x) = -3$ d. Déterminer $f(]0, +\infty[)$, $f(]-\infty, 0])$ et $f(]0, 4])$.2. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par : $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+3}$.Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} g(x)$.3. Soit h la fonction définie par : $h(x) = g \circ f(x)$.a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} h(x)$.b. Prouver que h est prolongeable par continuité en 0 .**Exercice4 :**

$$\text{Soit la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } \begin{cases} f(x) = \frac{x + \cos(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.2. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.3. Etudier la continuité de la fonction f en 1 .4.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -\frac{1}{2}, 0[$ au moins une solution α .b. Justifier que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$.5. Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$. Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.**Exercice5 :**

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\} \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - x - 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

- 1.a. Vérifier que pour tout $x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}$, $|f(x)| \leq |x|$.
- b. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
2. Etudier la continuité de f en 1.
- 3.a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{-2}{x-1}\right)$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha}$.

Exercice6 :

I- Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)}{x+1}$.

1.a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2x^2}{x+1}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{2}$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{x}{2}$ admet dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ au moins une solution α .

II- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{Z}\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

3. Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1 \\ h(1) = m \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

Déterminer m pour que h soit continue sur $]-\infty, 1]$.

Exercice7 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1.a. Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c. Vérifier que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

d. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2. Le tableau de variation ci-dessous donne les variations d'une fonction g définie et continue sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g(x)$	0	↗ 2	↘ 3	↘ 0	↘ $-\infty$

a. Déterminer $g([1, +\infty[)$ et $g(]-\infty, 2])$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$.

c. Montrer que $f \circ g$ est continue sur $]-\infty, 2[$.

d. Montrer que $f \circ g(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.

