Exercice1 :

Etudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 3x - 1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 2} + x\right)$ $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - 3}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + x} - 2x\right)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\tan x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

Exercice2 :

Les questions de cet exercices sont indépendantes :

1. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{\sin(1-3x)}{1-3x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{(x-1)^2}$

2. On considère la fonction f définie sur IR^* par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

Montrer que : $\forall\, x \in IR^*,\ -x^2 + 1 \le f(x) \le x^2 + 1$. En déduire $\lim\limits_{0} f$.

3. Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^2 - 2\sin x$.

Montrer que : $\forall\, x \in IR,\ g(x) \ge x^2 - 2$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

4. Soit h la fonction définie sur IR^* par : $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}$.

Montrer que : $\forall\, x \in IR^*,\ h(x) \ge -\frac{1}{x^2} + 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

Exercice3 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x + 1 \text{ si } x \le 0 \\ f(x) = 2 - \frac{\sin x}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Justifier que f est continue sur IR.
3.a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $2 - \frac{1}{x} \le f(x) \le 2 + \frac{1}{x}$. Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1, 0]$.

Exercice4:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} 5x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ si } x \le 0 \\ 1 + \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3.a. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $1 \le f(x) \le 1 + \frac{2}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une moins une solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$.

5. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

Exercice5 :

Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \text{ si } x \ge 0 \\ \frac{x \cos x}{x^2 + 1} - 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0.

2.a. Montrer que pour tout x $\in]-\infty, 0[$, on a : $\frac{x}{x^2+1} - 1 \le f(x) \le \frac{-x}{x^2+1} - 1$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3.a. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1^+} f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x^2+1\right)$.

Exercice6:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9}+5 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1.a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Montrer que pour tout x > 0, on a : $\frac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Pour tout x > 0, on pose : $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b. La fonction f est-elle continue en 0 ?

3. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction h définie et continue sur IR.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} h \circ f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h \circ f(x)$.

Exercice7 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + \dfrac{9}{4}} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

1.a. Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $1 \le f(x) \le 1 + \frac{2}{x^2}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2.a. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b. Etudier la continuité de f en 0.

3.a. Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

c. En déduire que l'équation $2f(x) - 7 = 0$ admet une unique solution α dans $[0,2]$.

Exercice8 :

Soit f la fonction définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 \sin(\frac{2}{x})}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Montrer que pour tout x $\in]0, +\infty[$, on a : $\frac{-x^2}{1+x} \le f(x) \le \frac{x^2}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3. Soit h la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $h(x) = f\left(-\sqrt{x+1}\right)$.

a. Montrer que h est continue sur $]-1, +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $h(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solutions dans]0, 1[.