Les nombres complexes (I)
Limites et continuité

Séance 5

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cos x & \text{si} \quad x>0\\ x^3+x+1 & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0 puis sur IR.

2) a) Montrer que pour tout x > 0, on a : $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

b) En déduire que pour tout x > 0, on a : $|f(x)|\leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) Calculer alors la limite de f en $+\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

3) a) Montrer que l'équation f(x)= $-x$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty, 0]$.
Vérifier que $-0{,}5<\alpha<-0{,}4$

b) En déduire que α est une solution dans IR de l'équation : $x^2+2=-\frac{1}{x}$

EXERCICE 2:

Ecrire sous la forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=i\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}$ et $z_2=1+\sin\frac{\pi}{4}+i.\cos\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 3:

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout point M d'affixe $z\neq 0$, on lui associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=i+\dfrac{2}{z}$

1) On suppose que $z=x+iy$ tel que $(x,y)\in IR\backslash\{(0,0)\}$

a) Vérifier que $z'=\dfrac{2x}{x^2+y^2}+i\left(1-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right)$

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel.

2) On suppose que $z=2e^{i\theta}$, $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

b) Montrer que $z'=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

c) Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ

d) Application : on pose $z=1+i\sqrt{3}$. Calculer $|z'|$. En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

e) Déterminer θ pour laquelle M' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 4:

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\vec{v})$.

Soit le point M d'affixe : $z = 1 + e^{i2\theta}$; $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Soit le point A d'affixe $z_A = 3 - i\sqrt{3}$

et le point I d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble des points M quand θ varie dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

2) Montrer que $z = 2cos\ \theta . e^{i\theta}$

3) a) Ecrire z_A sous la forme exponentielle.

b) Déterminer θ pour que O, A et M soit alignés.

c) Déterminer θ pour que OAM soit un triangle rectangle en O.

EXERCICE 5:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$,on note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 3 + 2i. On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z-1+2i}{z-1}$

1. Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f.
Placer les points A, O', B et B' dans le plan.

2. **a.** Pour tout nombre complexe z différent de 1, Calculer, le produit $(z'-1)(z-1)$.

b. En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM.AM' = 2 \quad \text{et} \quad (\vec{u};\vec{AM}) + (\vec{u};\vec{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in Z$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C'). En précisera le centre et le rayon. Construire (C) et (C').

4. **a.** Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{AB})$.

b. Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (Δ) d'origine A, passant par B, alors M 'appartient à une demi-droite que l'on précisera.