

Les nombres complexes (I)

Limites et continuité

Séance 3

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) a- Montrer que, pour tout $x > 0$, $1 - x \leq f(x) \leq 1 + x$
b- Etudier alors la continuité de f en 0
- 2) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -\infty, 0[$ une unique solution α
b- Vérifier que $-0.7 < \alpha < -0.6$
- 3) a- Montrer que la fonction $h : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$
b- Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\tan x)$

EXERCICE 2:

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation.



- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x+4}\right)$
- 2) Soit la fonction g définie sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$ par : $g(x) = f(x) - x$
 - a) Déterminer l'image de $] -\infty, \frac{1}{2}[$ par g .
 - b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $] -\infty, \frac{1}{2}[$.
Vérifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$
 - c) Montrer que : $\alpha^2(1 - 2\alpha) = 1$
- 3) On donne le tableau de variation d'une fonction h définie et dérivable sur $[-1, +\infty[$:



- a) Calculer $goh(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} goh(x)$
- b) Déterminer $goh([-1, +\infty[)$
- c) Montrer que la fonction goh est continue sur $[-1, +\infty[$
- d) Dresser le tableau de variation de la fonction goh
- e) En déduire que l'équation $goh(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[-1, +\infty[$.

EXERCICE 3: (Vrai ou Faux)

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

- 1) Le nombre complexe $a = (\sqrt{3} + i)^{2010}$ est imaginaire pur
- 2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit θ un réel.
L'ensemble des points M d'affixe $z = 1 - 3i + e^{2i\theta}$ est le cercle de centre le point $J(-1 + 3i)$ et de rayon 1.



- 3) Pour tout nombre complexe z , si $|1 + iz| = |1 - iz|$ alors la partie imaginaire de z est nulle
- 4) Dans le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) on donne les points A et B d'affixes respectives non nulles z_A et z_B telle que $z_B = iz_A$ alors le triangle OAB est rectangle et isocèle en O

EXERCICE 4:

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

- 1) a) Ecrire z_A sous la forme exponentielle.
 - b) Montrer que $z_B = z_A \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$
 - c) En déduire la nature du triangle OAB .
- 2) Placer le point A puis le point B .
- 3) a) Donner la forme algébrique de z_B .
 - b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
- 4) On donne le point C d'affixe $z_C = -\sqrt{3} \cdot \overline{z_B}$
 - a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.
 - b) Calculer l'aire \mathcal{A} du losange $OACB$.

EXERCICE 5:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 2e^{i\theta}$; $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et $z_C = -1 + e^{i\theta}$

- 1) Déterminer l'ensemble des points A quand θ varie dans $]0, \pi[$.
- 2) Ecrire z_B et z_C sous la forme exponentielle.
- 3) Montrer que $OBAC$ est un rectangle.
- 4) Déterminer le réel θ de $]0, \pi[$ tel que $OBAC$ soit un carré.

EXERCICE 6:

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A tout point M

d'affixe $z \neq 0$, on lui associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i + \frac{2}{z}$

- 1) On suppose que $z = x + iy$ tel que $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$
 - a) Vérifier que $z' = \frac{2x}{x^2 + y^2} + i \left(1 - \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$
 - b) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est réel
- 2) On suppose que $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
 - a) Montrer que $z' = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$
 - b) Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ
 - c) Application : on pose $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calculer $|z'|$. En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

