Exercice1 :

Soit z un nombre complexe non nul de module $\sqrt{2}$ et d'argument θ.

Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes : $\frac{z}{\bar{z}}$, $\frac{z^2}{1+i}$ et $\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

Exercice2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \left(\sqrt{3}-i\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B = -1+i\sqrt{3}$ et $z_C = i$.

1.a. Ecrire $\left(\sqrt{3}-i\right)$ sous forme exponentielle puis déduire la forme exponentielle de z_A .

b. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_B et $\frac{z_A}{z_B}$.

c. Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

d. Déterminer l'affixe du point D pour que OADB soit un carré.

2. A tout point M du plan d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}z - \left(\sqrt{3}-i\right)}{z-i}$.

a. Vérifier que $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)$.

b. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

Exercice3 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et d'affixes respectives $z_M = e^{i\theta}+1$ et $z_N = e^{i\theta}-1$, où θ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

1. Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

2.a. Montrer que $\frac{z_N}{z_M} = i\tan\frac{\theta}{2}$.

b. Déduire la nature du triangle OMN.

3. Déterminer l'ensemble E décrit par le point M lorsque θ décrit l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice4 :

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 2, $1-e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.a. Montrer que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b. Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

3. Calculer $\frac{z_B}{z_C}$, en déduire que $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$.

4. Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

Exercice5 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}+i$ et $z_B = -1+i\sqrt{3}$.

1.a. Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Construire les points A et B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

c. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

d. Déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

e. Déterminer sous forme cartésienne l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un carré.

2. Soit M le point d'affixe $z_M = 1+e^{2i\theta}$, où θ est un réel de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

a. Montrer que $z_M = 2\cos\theta\; e^{i\theta}$.

b. Déterminer θ pour que M varie sur le cercle Γ de centre O et de rayon 2.

c. Déterminer θ pour que les points O, A et M soient alignés.

Exercice6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1+i\sqrt{3}$, $z_B = -1-i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1.a. Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Montrer que $z_A^{2019} \in \mathbb{R}_+$.

c. Construire les points A, B et C dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

2.a. Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Soient les points D et E d'affixes respectives $z_D = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1 + z_D^2$.

On désigne par Γ le cercle de centre I et de rayon 1.

a. Justifier que $D \in \Gamma$ et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}\right)$.

b. Construire alors le point D.

4.a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_D - z_I$ et $z_E - z_I$.

b. En déduire que les points I, D et E sont alignés puis construire le point E.

Exercice7 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixe respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2ie^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.a. Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Construire les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c. Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

d. Montrer que $z_C = z_A + z_B$.

e. Déduire que OACB est un losange.

3. Soit le point M d'affixe $z_M = e^{2i\theta} + 1$, où θ est un réel de l'intervalle $[0, \pi]$.

a. Vérifier que $z_M = z_A + z_B$.

b. Déterminer la valeur de θ pour que les points O, A et M soient alignés.

Exercice8 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le nombre complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $j^2 = \bar{j}$ et que $\dfrac{1}{j} = \bar{j}$.

2. Calculer $1 + j + j^2$.

3. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $2j$ et $2j^2$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

4. Soient I et J les points d'affixes respectives $-2i$ et 1 et f l'application de P\{J} dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{2 - iz}{1 - z}$.

a. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $z' = \dfrac{i(z + 2i)}{z - 1}$.

b. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est réel.

c. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

Exercice9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

1.a. Donner la forme exponentielle de a.

b. Construire le point A.

2. Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{a - 1}{1 - \bar{a}}$.

a. Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C).

b. Montrer que $\dfrac{b - 1}{a - 1}$ est réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c. Construire le point B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Soit θ un argument du nombre complexe b.

Montrer que $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{5 - 2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}}$.