

**Exercice N°1:**

I- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$  et soit  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $R(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ ; ( $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$ )

1/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , interpréter graphiquement les résultats obtenus

2/ Dresser le tableau de variation de  $f$

3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 0

4/ Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = f(x) - x$

a) Etudier les variations de  $g$

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  et que :  $0,4 < \alpha < 0,5$

5/ Construire  $T$  et  $C$

II - 1/ Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  dont on précisera

2/ Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in J$  (où  $f^{-1}$  est la fonction réciproque de  $f$ )

3)a) Donner le tableau de variation de  $f^{-1}(x)$

b) Donner une équation de la tangente  $T'$  à  $C_{f^{-1}}$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$

c) Construire  $T'$  et  $C_{f^{-1}}$  dans le repère  $R$

III-

1/ Vérifier que :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$

2/ Donner une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

3/ Montrer que  $F(0) - F(-1) = \text{Log}\left(\frac{1+e}{2}\right)$

**Exercice N°2:**

I- Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 1 - \text{Log}x$

1 / Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation

2/ En déduire pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ;  $g(x) > 0$



II- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x + 1 + \frac{\text{Log}x}{x}$

On désigne par  $\zeta_f$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  ;  $\forall x \in ]0, +\infty[$

b) Dresser tableau de variation de  $f$

2/a) Montrer que la droite  $D : y = x + 1$  est une asymptote à  $\zeta_f$

b) Etudier les positions de  $\zeta_f$  par rapport à  $D$

3/a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

4/ Tracer  $D$ ,  $\zeta_f$  et  $\zeta_{f^{-1}}$  dans le même repère (où  $f^{-1}$  est la fonction réciproque de  $f$ )

5/ Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$

Montrer que  $F(e) - F(1) = \frac{e^2 + 2e - 2}{2}$

### Exercice N°3:

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ .

1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) a) Montrer que  $(C_f)$  admet deux asymptotes obliques d'équations respectives :

$$\Delta : y = x \text{ et } \Delta' : y = x + 1$$

b) Montrer que  $\omega(0; 1/2)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ .

3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $]0, +\infty[$

a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$ , admet une unique solution  $\alpha$  et que :



$$\text{Log}2 < \alpha < 1$$

c) Montrer que  $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

d) Ecrire une équation de la tangente T à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $\alpha$

e) Tracer T,  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . (on prend  $\alpha = 0.8$ )

II) On désigne par  $g^{-1}$  la fonction réciproque de g et  $(C')$  sa courbe représentative dans le repère R.

1) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $(g^{-1})'(0)$  en fonction de  $\alpha$ .

2) La courbe  $(C')$  coupe  $(xx')$  en un point I, écrire la tangente T' à  $(C')$  en I.

3) Tracer  $(C')$  et T' dans le même repère R.

#### Exercice N°4:

1) Soit g la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$

a) Calculer  $g'(x)$ . Etudier son signe.

b) Démontrer que la limite de g en  $+\infty$  est égale à -1.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire que pour tout  $x \geq 0$ , on a :  $g(x) \leq 0$ .

2) Soit f la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = xe^{-x} - x + 4$

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité: 2cm)

a) Vérifier que pour tout x de  $[0, +\infty[$  on a :  $f'(x) = g(x)$ .

b) Etudier les variations de f sur  $[0, +\infty[$ . Préciser la limite de f en  $+\infty$ .

3) a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = -x + 4$  est asymptote à  $(C_f)$ .

Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $\Delta$ .

b) Soit D la droite d'équation :  $y = -\frac{x}{2} + 4$

Calculer les coordonnées des points d'intersection de  $(C_f)$  et D.

c) Préciser la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.

d) Construire la courbe  $(C_f)$ .



**Exercice N°5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

et que  $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

1/a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

2/a) Etudier les variations de la fonction  $g(x) = f(x) - x$ . (remarquer que :  $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$ )

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $a$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $a \in ]2;3[$

3/a) Montrer que  $\forall x \in ]2;3[$  on a :  $|f'(x)| \leq 0,5$

b) En déduire que  $\forall x \in [2;3]$  on a :  $|f(x) - a| \leq 0,5|x - a|$

4/ Soit  $V$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq V_n \leq 3$

b) Montrer que :  $|V_{n+1} - a| \leq 0,5|V_n - a|$

c) Déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} : |V_n - a| \leq (0,5)^n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

**Exercice N°6**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ . On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe de  $f$  dans le repère  $R$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout réel  $x$  ;  $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$ .

b) En déduire que la courbe  $(\Gamma)$  admet au voisinage de  $(-\infty)$  une asymptote  $\Delta$  dont on précisera une équation cartésienne.



- 3) a) Vérifier que pour tout réel  $x$  ;  $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) On considère les points A, B et C de  $(\Gamma)$  d'abscisses respectives  $x_A = 0$ ,  $x_B = 1$  et  $x_C = -1$  et soit  $T_0$  la tangente à la courbe  $(\Gamma)$  au point A.  
Montrer que la droite (BC) est parallèle à  $T_0$ .
- 5) Tracer  $\Delta$ ,  $T_0$  et  $(\Gamma)$ .

**Exercice N°7**

I) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (1-x)e^x + 1$

- 1) Etudier le sens de variation de  $g$ .
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  et que  $x_0 \in [1.2, 1.3]$
- 3) Déterminer le signe de  $g(x)$ .

II) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$

On désigne par  $(C)$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

b) Montrer que la droite  $D$  d'équation :  $y = x + 2$  est asymptote de  $(C)$ .

c) Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $D$ .

3) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Tracer la courbe  $(C)$  ainsi que ses asymptotes.

**Exercice N°8**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ . On désigne par  $(\zeta_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $R = (o, \vec{u}, \vec{v})$ . (Unité 2cm)

A)

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter les résultats obtenus.b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$ .c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .2) Soit  $h(x) = f(x) - x$ .a) Dresser le tableau de variation de  $h$ .b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$  et vérifier que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ c) En déduire la position de  $(\zeta_f)$  par rapport à la droite  $\Delta : y = x$ .3) a) Montrer que le point  $I(0, \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de  $(\zeta_f)$ .b) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $(\zeta_f)$  au point  $I$ .

B)

1) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.b) Etudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  sur l'intervalle  $J$ .c) Déterminer une équation de la tangente  $T'$  à  $(\zeta_{f^{-1}})$  au point d'abscisse  $1/2$ 2) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x$  dans  $J$ .3) Tracer dans le repère  $R$  les droites  $\Delta$ ,  $T$  et  $T'$  et les courbes  $(\zeta_f)$  et  $(\zeta_{f^{-1}})$ .**Exercice N°9**Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = x + x(\ln x)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 4cm).1) a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- c) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = (1 + \ln x)^2$ .
- d) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 2)a) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1 .
- b) Etudier la position relative de  $(C)$  et  $T$ .
- c) Construire  $T$  et  $(C)$ .
- 3) Soit la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$  définie par  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ .
- a) A l'aide d'une intégration par partie Calculer  $I_1$ .
- b) Montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a :  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$ .
- 4) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations  $x=1$ ,  $x=e$  et  $y=0$ . Calculer  $A$  en  $\text{cm}^2$ .

*La confiance en soi est le premier secret du succès ( Ralph Waldo Emerson )*