Proposée par Mr

FEHRI BECHIR

2018/2019

Série Primitive

BAC SCIENCE

Exercice N°1 :

On considère la fonction f définie sur]-1, 1[par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit f la primitive de f sur]-1,1[qui s'annule en 0 et g la fonction définie sur] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [par g(x) = f(sin x).

1/ Montrer que g est dérivable sur] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$[déterminer sa fonction dérivée .

2/ déduire que pour tout x ∈] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [, g(x) =x

3/ Calculer f $(\frac{\sqrt{2}}{2})$, f $(\frac{1}{2})$ et f $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice N°2 :

On considère la fonction f définie sur [0,1] par $f(x)= \sqrt{1-x^2}$

Soit f la primitive de f sur [0,1] qui s'annule en 0 , et g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Par g(x) = f (cos x) .

1/ Montrer que g est dérivable sur $[0 ,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée .

2/ En déduire que pour tout x $\in[0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) =-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$

3/ Calculer f (1) et f $(\frac{1}{\sqrt{2}})$

Exercice N°3 :

Soit f la fonction définie sur [-2,2] par $f(x) =\sqrt{4-x^2}$.

1/a- Montrer que f admet au moins une primitive sur [-2, 2]

b- Soit f la primitive de f sur [-2, 2]qui s'annule en 0. Etudier la partie de f

2/ soit G la fonction définie sur $[0, \pi]$, par G(x) = f (2cos x) et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a- Montrer que le point I $(\frac{\pi}{2},0)$ est un centre de symétrique de C.

b- Calculer G'(x) .En déduire que pour tout x de $[0, \pi]$, $G(x)= \pi -2x + \sin 2x$.

c- Calculer alors f(1) , f(2) et $f(\sqrt{2})$

Exercice N°4 :

1/ Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par g(x) = x sin x +cos x-1

a-Etudier les variations de g sur $[0, \pi]$.

b- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution $\propto$ appartenant à] $\frac{2\pi}{3}, \pi$[

préciser le signe de g(x) .

2/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi[. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

"Le Premier règle de la réussite ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail"

a- Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
b- Vérifier que $f(\alpha) = \sin \alpha$
3/ On donne $\alpha \simeq 2{,}34$ et $f(\alpha)= 0.72$ construire la courbe representative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4/Déduire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha, \pi]$. Est une bijection de $[\alpha, \pi]$ sur intervalle I que l'on précisera .
5/ On pose $h(x) = g(x)-2 \cos x$, $x \in [0, \pi]$.
Montrer que h admet des primitives sur $[0, \pi]$.
Donner la primitive H de h sur $[0, \pi]$. Qui prend la valeur 1 en 0 .

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) =\sqrt{1 + \cos x}$
1/a- Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$.
b- Montrer que la fonction f^{-1} *est derivable sur* $]0, \sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.
2/soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par g(x) $\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$
On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ telle que $G(0) =0$.
a- Calculer la dérivée de la fonction : $x \longrightarrow G(x) + G(-x)$. En déduire que G est impaire
b- Montrer que pour tout x de $[0, \sqrt{2}[$, $G(x) = \pi - f^{-1}(x)$. En déduire G(1)

Exercice N°6 :

Soit f la fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :
$f(0) =1$, $f(1) =0$ et $f'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]0,1[$
1/Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$sur $[0, 1]$
2/a- Montrer que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(\cos x) = \frac{2}{\pi} x$.
c- En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.
3/ On pose pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $h(x) = f(\cos x)+ f(\sin x)$.
a- Montre que h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.
b- En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) =1$
4/ Pour tout n de $\mathbf{N}^*$ on pose $\varphi_n(x)= \cos (\frac{\pi}{2}x) - x^n$, $x \in [0, 1]$.
a- Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un unique réel $a_n \in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$
b-Montrer que pour tout x de $]0,1[$, si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.
b- En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.