**Exercice1 :**

Soit la suite $(U_n)$ définie sur IN par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \sqrt{4+3U_n}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \le U_n < 4$.

**2.a.** Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante.

**b.** En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $4 - U_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - U_n)$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN$, $4 - U_n \le 4.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**Exercice2 :**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < u_n < 2$.

**b.** Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$. En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**2.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN$, $2 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**3.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{3.2^n}\right)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

**Exercice3:**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur IN par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+4U_n^2}}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < U_n \le \frac{1}{2}$.

**2.a.** Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

**b.** En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**3.** Soit la suite réelle $(V_n)$ définie sur IN par : $V_n = \frac{1}{4U_n^2}$.

**a.** Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison 1.

**b.** Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de n.

**c.** Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**Exercice4 :**

Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur IN par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 3}{u_n}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $2 \le u_n < 3$.

**2.** Montrer que $(u_n)$ est croissante. En déduire que $(u_n)$ est convergente et trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \le 3 - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(3 - u_n)$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN$, $0 \le 3 - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**4.** Pour tout $n \in IN^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$.

**a.** Vérifier que pour tout $k \in IN^*$, $u_{k+1} - u_k = \frac{3}{u_k} - 1$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{2n-1}{6} \le s_n \le \frac{2n+1}{6}$.

**c.** Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{s_n}{n}$.

**Exercice5:**

On considère la suite $(U_n)$ définie sur IN par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 3}{U_n + 1}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq U_n < 3$.
**2.a.** Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante.
**b.** En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**3.a.** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}(3 - U_n)$ et en déduire que $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(3 - U_n)$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - U_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**Exercice6:**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 3$.
**b.** Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.
**c.** En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**2.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(U_n - 3)$.

**b.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**Exercice7 :**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{2U_n}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$.
**b.** Etudier la monotonie de la suite $(U_n)$. En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**2.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{2}(U_n - 2)$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 2 \leq 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n < S_n \leq 2n + 3\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

**b.** Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

**Exercice8:**

Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + 2u_n}}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.
**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
**c.** En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

**2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Exercice9 :**

Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1, \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

**2.a.** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
**b.** Montrer par l'absurde que la suite $(u_n)$ n'est pas majorée.
**c.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k + 2}$.

**a.** Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_k + 2} = \dfrac{1}{u_k + 1} - \dfrac{1}{u_{k+1} + 1}$.

**b.** Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1 - \dfrac{1}{u_{n+1}+1}$ puis calculer la limite de la suite $(s_n)$.

**Exercice10:**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

**1.a.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq n+3$.

**b.** Etudier la monotonie de la suite $(U_n)$.

**2.** On considère la suite $(V_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - n$.

**a.** Démontrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

**c.** Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**Exercice11 :**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 1$.

**b.** Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

**c.** En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**2.** Soit la suite $(V_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{1}{U_n^2}$.

**a.** Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison 1.

**b.** Exprimer $V_n$ en fonction de n.

**c.** Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \geq \sqrt{n}$.

**b.** La suite $(s_n)$ est-elle convergente ? Justifier.

**4.** Soient les deux suites définies par : $a_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

**b.** Montrer que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

**c.** Déduire alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{2\sqrt{n}}$.

**Exercice12 :**

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

**b.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**c.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2} - \sqrt{u_{n+1}}$.

**2.** Soit la suite réelle $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = \sqrt{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\sqrt{1+u_n v_n^2}}$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}^2} = \dfrac{1}{v_n^2} + u_n$.

**c.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

**d.** Exprimer $v_n$ en fonction de $u_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

**Exercice13 :**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur IN par $u_n = \dfrac{n+1}{4^n}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**2.** Soit la suite $(S_n)$ définie sur IN par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

**a.** Montrer que la suite $(S_n)$ est croissante.

**b.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $S_n \leq 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

**c.** En déduire que la suite $(S_n)$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

**Exercice14:**

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur IN par $u_0 = 2$, $v_n = \dfrac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $n \in IN$.

**1.** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont minorées par 1 et majorées par 2.

**2.a.** Vérifier que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

**b.** Montrer alors, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $u_n \geq v_n$.

**c.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et que la suite $(v_n)$ est croissante.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $\dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(u_n - v_n)$.

**c.** Montrer alors que pour tout $n \in IN$, $u_n - v_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

**4.** On admet que pour tout $n \in IN$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

**Exercice15:**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}$.

**1.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \leq U_n \leq 1$.

**b.** Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

**c.** Déduire que $(U_n)$ est convergente puis calculer sa limite.

**d.** Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.

**2.** Soit la suite $(S_n)$ définie sur IN par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k U_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout $n \in IN$, on pose $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $V_{n+1} - V_n = \dfrac{-1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+3}$ puis déduire que le suite $(V_n)$ est décroissante.

**b.** Montrer que la suite $(W_n)$ est croissante.

**c.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $W_n \leq V_n$.

**d.** Déduire que les suites $(V_n)$ et $(W_n)$ sont adjacentes.

**e.** Déduire que la suite $(S_n)$ converge vers un réel a tel que $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 1$.

**Exercice16 :**

Soient les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**1.** Soit la suite $(w_n)$ définie sur IN par : $w_n = u_n - v_n$.

Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$.

**2.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n \leq v_n$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que la suite $(v_n)$ est décroissante.

**4.** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergente vers une même limite.

**5.** On considère la suite $(t_n)$ définie sur IN par : $t_n = 3u_n + v_n$.

**a.** Montrer que la suite $(t_n)$ est constante.

**b.** En déduire la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**Exerice17 :**

On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par : $a_0 = 1, b_0 = 7$ et pour tout $n \in IN$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$.

Pour tout $n \in IN$, on pose $u_n = b_n - a_n$.

**1.a.** Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

**b.** Exprimer, alors $u_n$ en fonction de n, et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**2.** Soit $(S_n)$ la suite définie sur IN par $S_n = \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k)$.

Vérifier que pour tout $n \in IN$, $S_n = 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $a_n \le b_n$.

**b.** Montrer que la suite $(a_n)$ est croissante et que la suite $(b_n)$ est décroissante.

**4.** Démontrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.

**5.** Soit $(v_n)$ la suite définie sur IN par $v_n = a_n + b_n$.

**a.** Montrer que $(v_n)$ est une suite constante.

**b.** Justifier que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes et calculer leur limite commune.

**Exercice18 :**

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur IN par $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $n \in IN$.

**1.** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont minorées par 1 et majorées par 2.

**2.a.** Vérifier que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

**b.** Montrer alors, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $u_n \ge v_n$.

**c.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et que la suite $(v_n)$ est croissante.

**3.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \le \frac{1}{2}$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.

**c.** Montrer alors que pour tout $n \in IN$, $u_n - v_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

**4.** On admet que pour tout $n \in IN$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

**Exercice19 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur IN par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.

Pour tout $n \in IN$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $2 \le v_n \le 3$.

**2.a.** Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{2v_n + 1}$ et $w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{2w_n + 1}$.

**c.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_n \le w_n$.

**3.** Montrer par récurrence que la suite $(v_n)$ est croissante et que la suite $(w_n)$ est décroissante.

**4.a.** Montrer que pour tout $n \in IN$, $w_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{25}(w_n - v_n)$.

**b.** Déduire que pour tout $n \in IN$, $w_n - v_n \le \frac{1}{2 \times 25^n}$.

**5.a.** Justifier que les deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont adjacentes.

**b.** Déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.