Proposée par Mr

FEHRI BECHIR

2018/2019

Série de Fonction Logarithme népérien N°2

BAC SCIENCE

Exercice N°1 :

A/ Soit g la fonction définie sur]0 , +∞[par g(x) = 1+ 2xlnx

1/ Etudier les variations de g sur]0 , +∞[, (on pourra remarquer que $\ln(\frac{1}{\sqrt{e^3}}) = -\frac{3}{2}$).

2/ Calculer g(1) puis en déduire le signe de g(x) pour x >0

B/Soit f la fonction définie sur]0 , +∞[par f(x) = $\frac{1+lnx}{(1+x)^2}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé(o ,$\vec{i},\vec{j}$).

1/a- Vérifier que pour tout x >0 , f ' (x) = $\frac{g(x)}{x(1+x)^3}$.

b- Dresser le tableau de variation de f

c- Etudier les branches infinies de C .

3/ Déterminer une équation de la tangente à C au point d'intersection de C avec l'axe des abscisses .

4/ Tracer C .

C/ Soit un réel $\lambda > 1$.

1/ Vérifier que pour tout x > 0 , $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$..

2/ En déduire $\int_1^{\lambda} \frac{dx}{x(1+x)}$

3/ On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x=λ.

a- A l'aide d'une intégration par partie , déterminer $A(\lambda)$.

b- Calculer $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Exercice N°2 :

I/ On considère la fonction g définie sur]0 , +∞[par g(x) = x(x-1)+lnx.

1/ Montrer que la fonction g est strictement croissante sur]0 , +∞[.

2/ Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour x>0.

II/ Soit f la fonction définie sur]0 , +∞[par f(x) = $(x-1)^2 + ln^2 x$

On désigne par C_1 la courbe de f dans un repère orthonormé(o ,$\vec{i},\vec{j}$).

1/a- Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b-Montrer que f est dérivable sur]0 , +∞[et que f'(x)= 2 $\frac{g(x)}{x}$pour x>0

c- Dresser le tableau de variation de f sur]0 , +∞[.

2/ Montrer que la restriction h de f à]0 ,1] est une bijection de]0 ,1] sur [0 , +∞[.

On désigne par la réciproque de h et par C_2 la courbe représentative de h^{-1} dans le repère orthonormé(o ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

3/ Soit u la fonction définie sur]0 ,1] par u(x) = h (x)-x

a- Dresser la tableau de variation de u sur]0 ,1].

b- En déduire qu'il existe un seul réel a de]0 ,1] tel que h(a)=a .

c- Vérifier que 0.5$< a < 1$.

4/ a- Montrer que C_1admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction celle de (o ,$\vec{\jmath}$).

b- Tracer dans le même repère (o ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) la droite Δ d'équation y = x , la courbe C_1 et la courbeC_2

Exercice N°3 :

A/ 1/ Soit g la fonction définie sur R_+^* par g(x) = (1-x) lnx-x . Déterminer le signe de g(x)

2/ Soit h la fonction définie sur R_+^* par h(x)= lnx-x

a- Dresser le tableau de variation de h .

b- En déduire le signe de h .

B/ Soit f la fonction définie sur R_+^* par f(x) =lnx (lnx-x).

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé(o ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

1/ Montrer que f est dérivable sur R_+^* et que f'(x) = $\frac{g(x)+h(x)}{x}$

2/ Dresser le tableau de variation de f .

3/ Déterminer la nature des branches infinies de C_f avec l'axe des abscisses.

4/a- Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

b-Déterminer une équation de tangente T à C_f au point d'abscisse 1

c-Vérifier que le point A(e,-e+1) est un point d'intersection de C_f avec T.

5/ Construire C_f et T.

6/ Soit ∝ ∈]0,1[et D la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=∝ et x=1

a- Calculer à l'aide , d'une intégration par parties $\int_{\propto}^{1} ln^2$xdx et $\int_{\propto}^{1} x\ln x dx$.

b- En déduire , à l'aide de ∝ , l'aire A(∝) de D .

c- Déterminer $\lim\limits_{\propto \to 0^+} A(x)$

7/ a- Monter que f réalise une bijection de R_+^* sur un intervalle J à préciser .

c- Tracer dans le même repère la courbe de f^{-1}.

Exercice N°4 :

A/ Soit f la fonction définie sur]0,+∞[\{1} par f(x) = $\frac{1}{x}$ + $\frac{1}{\ln x}$ on désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé(o ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

1/ Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Interpréter les résultats graphiquement.

2/a-Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[\{1} par f'(x)= $\frac{1}{x^2}$ - $\frac{1}{x(lnx)^2}$

b-Dresser le tableau de variation de f .

3/Soit h la restriction de f à]0,1[.

a- Montrer que h réalise une bijection de]0,1[sur un intervalle J que l'on précisera .

b-Montrer que l'équation h(x) =0 admet dans]0,1[une unique solution ∝ et que

$0.5 < \propto < 0.6$.

c- En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera .

4/ Tracer C_f.

5/ Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1}

6/a- Montrer que $h'(\propto) = -\frac{\propto+1}{\propto^3}$

b- Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 t exprimer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de $\propto$

B/ Soit g la fonction définie sur]1,+∞[par g(x) =2f(x^2).

On désigne par $C_g$la courbe de g repère (o ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

1/ Vérifier que pour tout x ∈]1,+∞[, f(x)-g(x) = $\frac{1}{x}$ - $\frac{2}{x^2}$

2/ En déduire la position relative de C_f et C_g sur]1,+∞[.

3/ Soit x ∈ [2,+∞[, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g $d'abscissex$.

Pour quelle valeur de x , la distance NM est-elle maximale ?.

Exercice N°5 :

I/1- Soit h la fonction définie sur l'intervalle]0,+∞[par h(x) = x-lnx.

a- Dresser le tableau de variation de f .

b- En déduire que pour tout réel x de]0,+∞[, h(x) ≥1

2/ Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-lnx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

a- Montrer que f est continue sur [0,+∞[.

b- La fonction f est –elle dérivable à droite en 0

II/ Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par f(x) =$\int_x^{2x} f(t)dt$.

1/a- Montrer que f est dérivable sur [0,+∞[.

b-Montrer que pour tout x de [0,+∞[f '(x) = $\frac{ln2-lnx}{h(2x)h(x)}$ et $f'_d(0)=0$

2/ Montrer que pour tout x de]0,+∞[$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$

3/ Montrer que pour tout x de [1,+∞[$0 \leq f(x) - ln2 \leq \frac{\ln(2x)}{x-lnx}$ en déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4/ a- Montrer que f($\frac{1}{2}$)≤ ln2.

b-Montrer alors qu'il existe un réel ∝ de [$\frac{1}{2}$, 1] tel que $f(\propto) = ln2$

5/a- Dresser le tableau de variation de f .

c- Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé(o ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).
(On donne f(1) ≃0.9 et f(2) ≃1.1)

III/ Dans tout cette partie , n désigne un entier naturel non nul .

1/ Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-\ln t}$ dt n , n ≥ 1

a- Montrer que pour tout t de]0,+∞[, $\frac{t}{t-\ln t} \leq t$.

b- Montrer que la suite (V_n) est croissante .

c- En déduire que la suite (V_n) est convergente et que $0 \leq \lim_{x \to +\infty} V_n \leq \frac{1}{2}$

2/ Soit la suite (W_n) définie par

$W_n = \int_1^n \frac{t}{t-\ln t}$ dt n , n≥ 1

a − Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[\quad , 1 \leq \frac{t}{t-\ln t}$

c- En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} W_n$