

EXERCICE N°1 : (4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
- Calculer le module et un argument du nombre a .
 - Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
 - Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle \mathcal{C} de centre O dont on déterminera le rayon.
 - Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = b e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- Montrer que $b' = 8$.
- Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.
- On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
 - Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.



EXERCICE N°2 : (6points)

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère de l'espace \mathcal{E}

Soit le plan $P : 2x + 2y - z = 0$, le point $A(2,2,-1)$ et la droite $D : x = y = z$

- 1) a) Trouver une représentation paramétrique de D
b) Donner un point B et un vecteur directeur \vec{U} de D
- 2) a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à D
b) Donner une représentation paramétrique de la droite D' passant par A et perpendiculaire à P
- 3) Soit $M(m,m,m)$ un point de D
 - a) Montrer que $AM^2 = 3(m-1)^2 + 6$
 - b) Déterminer le point M_0 de D pour que la distance AM_0 soit minimale
 - c) Déduire la distance de A à la droite D
- 4) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{U}$
b) Retrouver $d(A,D)$

EXERCICE N°03 : (4points)

On définit deux suites u et v sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

- b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $0 < u_n < v_n$.
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

- b) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

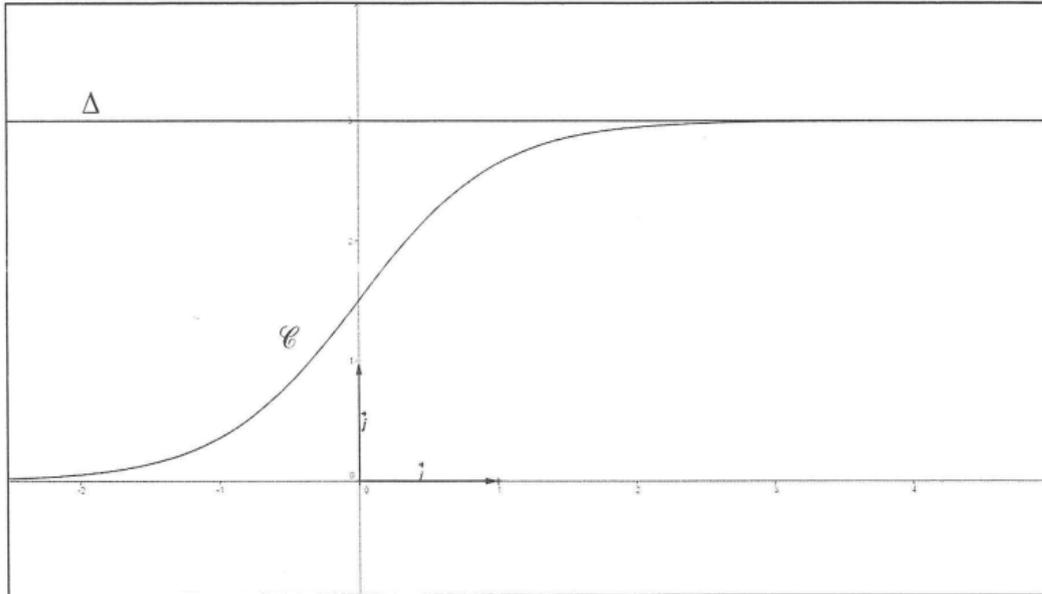


EXERCICE N°04 : (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbf{R} .
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbf{R} .
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbf{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur \mathbf{R} .
2. On désigne par H la fonction définie sur \mathbf{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbf{R} .
3. Soit a un réel strictement positif.
 - a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.



b. Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c. On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$.

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .