REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques Section : SCIENCES ET ECH SERIE n° :5 — DURE : 3H Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION5

EXERCICE N°1 : (4 points)

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

b. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = 2 + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - i\sqrt{2}.$$

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$.

En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.

c. Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2, appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2. On appelle f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité :

$$z' = z^2 - 4z + 6.$$

On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin.

a. Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z-2)^2$.

b. Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ' sur le dessin.

3. On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D' l'image de D par f.

a. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.

En déduire que D est situé sur le cercle Γ.

b. À l'aide la question 2.b, donner une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AD'}\right)$ et placer le point D' sur le dessin.

c. Démontrer que le triangle DAD' est équilatéral.

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

<u>EXERCICE N°2 :</u> (6poitns)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B : Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n), en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

<u>EXERCICE N°03 :</u> (4poitns)

Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A (1,-2,2) ;

B (1,0 ,1) et l'ensemble S des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et son rayon R.

2) Soit P le plan passant par E(1,1,-1) et perpendiculaire à la droite (AB).

a- Déterminer une équation cartésienne du plan P.

b- Montrer que P et S sont tangents et préciser les coordonnés de leur point de contact H.

3) Soit Q le plan tangent à S en B.

a- Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q est $-2x + z + 1 = 0$.

b- Montrer que les plans P et Q sont sécants et déterminer la droite $\Delta = P \cap Q$.

c- Montrer que $\Delta \cap S = \varnothing$.

4) Soit Q_m : $-2x + z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

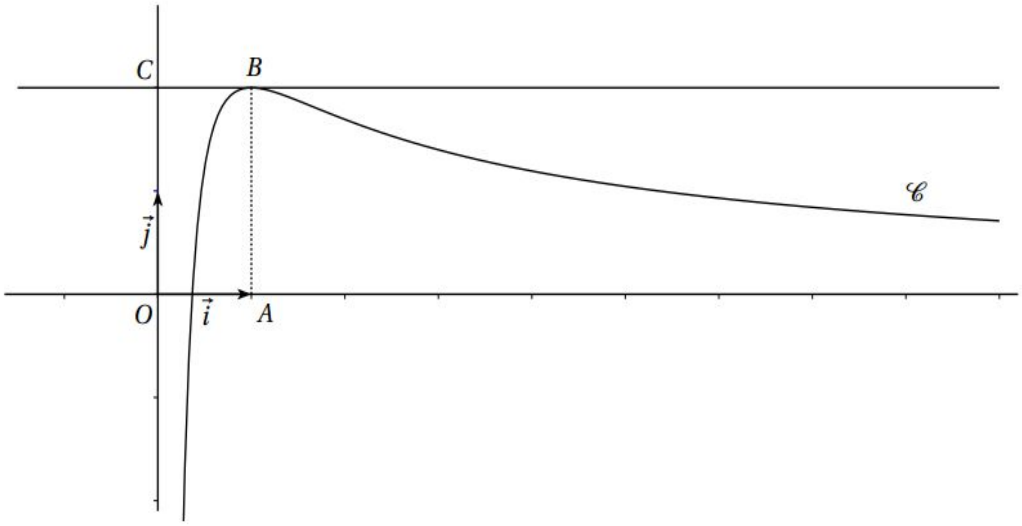
a- Déterminer suivants les valeurs de m : $S \cap Q_m$.

b- Montrer que Q_0 coupe la sphère S suivant un cercle ζ qu'on déterminera son rayon r et son centre H'.

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

<u>EXERCICE N°04 :</u> (6 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69