

EXERCICE N°1 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$.

On désigne par Ω le centre de Γ .

Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b et c , où $a = 5 + 5i, b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ .
2. Soit D le point d'affixe $2 + 2i$.
Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC) .

Partie B

À tout point M du plan différent de O , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{20}{\bar{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z .
On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M .
 - a. Vérifier que $z + \bar{z} = 4$.
 - b. Exprimer $z' + \bar{z}'$ en fonction de z et \bar{z} et en déduire que $5(z' + \bar{z}') = z'\bar{z}'$.
 - c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ .
Placer M' sur la figure.

EXERCICE N°2 : (6 points)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
 - a. Vérifier que $p(X = 0) = \frac{3}{10}$, puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
 - c. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
 A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.
 - a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des événements suivants :
 - B : « seule la première boule tirée est verte » ;
 - C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
 - b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?



EXERCICE N°03 : (4 points)

une machine est achetée à 3000 dinars. le prix de revente y , exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

Nombres d'années d'utilisation : x_i	0	1	2	3	4	5
Prix de revente en dinars : y_i	3000	2400	1920	1536	1229	893

A. /1. Représenter le nuage de points associés à la série statistique $(x_i ; y_j)$ dans un repère orthogonal du plan.

Les unités : 2cm pour une année sur l'axe des abscisses

1cm pour 200 dinars sur l'axe des ordonnées.

2./a. Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

b. Représenter la droite D dans le repère précédent.

3./a. Déterminer le prix de revente après 6 années d'utilisation.

b. Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 300 dinars.

B. /On pose $z = \ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par :

$$z = -0,22x + 8,01$$

1./Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x \times B$ ou A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité

2./On admet que $y = 3011 \times (0,8)^x$

a. Déterminer le prix de revente après 6 années d'utilisation

b. Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 dinars.

C. /Après 6 années d'utilisation, le prix de revente d'une machine est 780 dinars.

Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? Expliquer.

EXERCICE N°04 : (6 points)

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbf{R} par $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k=1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur \mathbf{R} . Calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbf{R} .

4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$. Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I .



Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} , représentant la fonction f_{-1} .
Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x .
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_{-1} , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

Représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1



