❄ Lycée secondaire El Alia ❄

Baccalauréat Tunisien
4 ème sciences
Espace
✍ Lahbib Ghaleb ✍

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

A la fin de chaque exercice cliquez sur Retour pour aller à l'index

Exercice 1 ★★☆☆ — *Session principale 2019*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-2,1,1)$, $B(-1,-1,0)$, $C(1,1,4)$, $H(0,0,2)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + 2 \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. a) Montrer que les points A,B et C définissent un plan P.

   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x + y - z + 2 = 0$.

2. Soit le point E de coordonnées (2,2,0).

   a) Vérifier que E n'appartient pas à P.

   b) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

3. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P en un point que l'on précisera.

4. Soit $\alpha \neq 0$ et $M(\alpha; \alpha; -\alpha + 2)$ un point de Δ.

   a) Calculer en fonction de α le volume du tétraèdre MABC.

   b) En déduire les coordonnées des points M pour lesquels le volume du tétraèdre MABC est égal au double du volume du tétraèdre EABC.

Retour

EXERCICE 2 ★★☆☆

Session de contrôle 2019

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$.
On désigne par P le plan d'équation $x-2y+2z+1=0$.

1. a. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(1,-2,-2)$ et de rayon R=2.

   b. Montrer qu'une l'intersection de (S) et P est un cercle (C) de centre $K\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9},-\frac{22}{9}\right)$ et dont on déterminera le rayon r.

2. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite $(K\Omega)$ est :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+2t \end{cases}$$

3. Soit $I(\alpha,\beta,\gamma)$ un point de la sphère (S) et Q le plan tangent en I à (S).

   a. Montrer qu'une équation du plan Q est :

$$(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z-\alpha+2\beta+2\gamma+5=0$$

   b. Vérifier que $N(-1,2,-6)$ est un point de $(K\Omega)$.

   c. Montrer alors que tous les plan Q tangents à (S) en un point de (C) passent par N.

Retour

EXERCICE 3 ★★☆☆ *Session principale 2018*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit le plan Q d'équation $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

   Montrer que le plan Q coupe les axes $\left(O, \vec{\imath}\right)$, $\left(O, \vec{j}\right)$ et $\left(O, \vec{k}\right)$ respectivement aux points $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, \sqrt{2})$.

2. Soit la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont tangents et déterminer leur points de contact.

3. Soit a un réel strictement positif .

   On considère les points $M(a, 0, 0)$ et $N(0, \frac{4}{a}, 0)$.

   Déterminer en fonction de a , les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CN}$.

4. a. Montrer qu'une équation du plan (CMN) est $4x + a^2y + 2a\sqrt{2}z - 4a = 0$.

   b. Soit d la distance du point O au plan (CMN).

   Montrer que $d = 1 - \dfrac{(a-2)^2}{a^2+4}$.

   c. En déduire la valeur du réel a pour laquelle la distance d est maximale.

5. a. Montrer que pour tout réel $a > 0$, le volume du tétraèdre OCMN est égale à $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

   b. En déduire que pour tout réel $a > 0$, l'aire du triangle CMN est supérieure ou égale à $2\sqrt{2}$.

   c. Identifier les points M et N pour lesquels l'aire du triangle CMN est égale à $2\sqrt{2}$.

Retour

Exercice 4 ★★☆☆ *Session de contrôle 2018*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$.

1. a) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCI.

2. On désigne par P le plan (ABC).

   Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x+y+2z-4=0$.

3. Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0.$$

   a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$.

   b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $\sqrt{5}$.

   c) Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

   En déduire les coordonnés du point H, centre de $\mathcal{C}$.

4. Soit a un réel et M le point définie par $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$.

   a) Déterminer à l'aide de a les coordonnés du point M.

   b) Montrer que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = (a-1)(11a+3)$.

   c) En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point E défini par $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB}$.

   d) Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre AECI est égale à $\dfrac{3}{11}\mathcal{V}$.

Retour

Exercice 5 ☆☆☆☆ *Session principale 2017*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(2,2,1)$, $B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

   b) On note P le plan (OBC).
   En remarquant que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{OA}$, Justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

   c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.

2. Soit (S), l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0$$

   Montrer que (S) est la sphère de centre A est de rayon $\sqrt{11}$.

3. a) Calculer la distance OA.

   b) En déduire que la sphère (S) coupe le plan P suivant le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

   c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C).

4. a) Soit le point $H(1,-1,0)$.

   b) Montrer que H est le point du contact de la droite (BC) et du cercle (C).

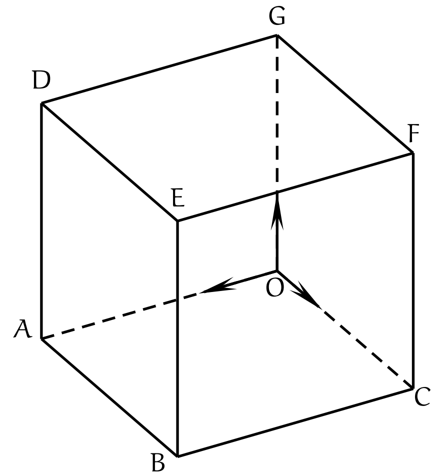
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.

Retour

Exercice 6 ☆☆☆☆

Session de contrôle 2017

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que $A(3,0,0)$; $C(0,3,0)$ et $G(0,0,3)$.



1. a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

   b) Déterminer les coordonnés du point Ω milieu de [CD].

2. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}$.

   b) calculer le volume du tétraèdre OAEG

3. On désigne par P le plan passant par A, E et G.

   a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x+y-z-3=0$.

4. Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$$

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre est le rayon.

   b) Montrer que S et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnés.

Retour

Exercice 7 ★★☆☆ — *Session principale 2016*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.
   Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.
2. Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que
   $$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$$
   a. Justifier que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.
   b. Montrer que $P\cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon .
   c. Déterminer $Q\cap S$.
3. On donne les points $A(0,0,1)$, $B(0,1,2)$ et $C(2,2,5)$.
   a. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. Montrer que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace ,
   $$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$$
4. Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels $ABCM$ est un tétraèdre de volume égal à 2.

Retour

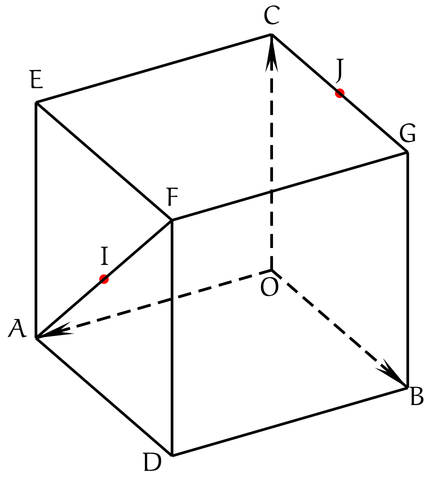
Exercice 8

Session de contrôle 2016

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.

On désigne par I et J les milieu respectifs des segments [AF] et [CG].



1. a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

   b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{u} - 4\vec{v} + 2\overrightarrow{w}\right)$.

2. a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

   b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

   c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

   Sans calculer les coordonnées de H, justifier que $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3. Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$$

Montrer que S est une sphère tangente au plan (OIJ).

Retour

Exercice 9 ★☆☆☆ *Session principale 2015*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1. a) Montrer que A,B et C déterminent un plan que l'on notera (P).

   b) Justifier que (P) est d'équation $x+y+z-2=0$.

   c) Vérifier que D n'appartient pas à P.

2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment [AB].

   a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

   b) En déduire que H est le centre du cercle $\mathcal{C}$.

3. Soit Δ la droite perpendiculaire au plan P passant par H.

   Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Soit M un point de Δ.

   a) Justifier que $MA = MB = MC$.

   b) Justifier qu'il existe un unique point I de Δ tel que $IA = ID$.
   Donner ses coordonnées.

   c) Déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

Retour

Exercice 10 ★☆☆☆

Session de contrôle 2015

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1. Justifier que (S) est de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.
2. Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit P l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JM}=0$.
   - a) Justifier que P est le plan d'équation cartésienne $2x-2y-z+5=0$.
   - b) Montrer que l'intersection de S et P est le cercle (C)de centre J et de rayon 4.
3. Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.
   - a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).
   - b) Montrer que $AJ=6$.
4. Soit M un point du cercle (C).
   - a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.
   - b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.
   - c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan P.

Retour

Exercice 11 ★★☆☆ — *Session principale 2014*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation $x+2y+z-6=0$.

1. a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

   b. Démontrer que la sphère (S) coupe le plan P suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2. On donne les points $A(2,0,2)$ et $B(2,2,0)$.

   a. Vérifier que $A \in (S)$, $A \notin P$ et $B \in (\mathcal{C})$.

   b. Soit Q l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que $MA = MB$.
   Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

   c. Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 6-3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

Retour

Exercice 12 ★☆☆☆☆ *Session de contrôle 2014*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère l' ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

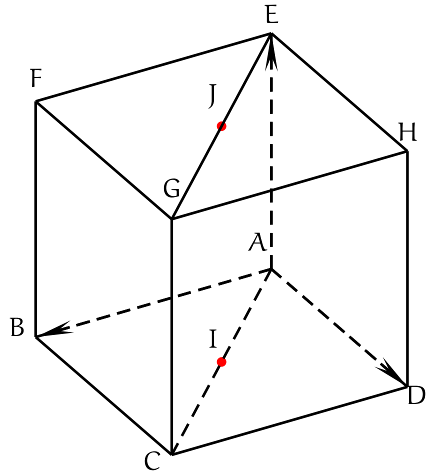
$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$$

1. Montrer que (S) est la sphère de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
2. Soit Δ la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$
   a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
   b. Montrer que l'intersection de Δ et (S) est vide.
3. Soit B le point de coordonnées (3, 0, 0).
   a. Justifier que le point B et la droite Δ déterminent un plan P.
   b. Montrer que P a pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$
   c. Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

Retour

Exercice 13 ★★☆☆

Session principale 2013



Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Le point I est le milieu de [AC].

Le point J est le milieu de [EG].

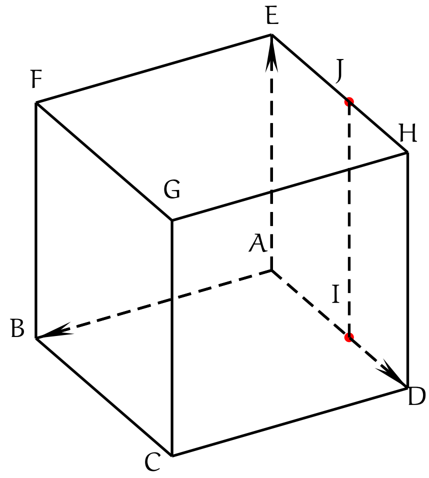
L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$.
2. $(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}) \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.
3. La sphère de diamètre [AC] est tangente au plan d'équation $z - 1 = 0$.

Retour

Exercice 14 ★☆☆☆ Session de contrôle 2013



Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$.

On note $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{AE}$.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

   b) Justifier qu'une une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$

   Dans la suite de l'exercice α est un réel et M un point de la droite (IJ) *de coordonnées* $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$.

2. a) Vérifier que : $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} - \alpha\overrightarrow{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}$

   et que : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$.

   b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3. a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot \overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}\right) \cdot \overrightarrow{BG} = 1$.

   b) Montrer que :

   (M, F, A et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

   c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume.

Retour

Exercice 15 ★☆☆☆

Session principale 2012

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

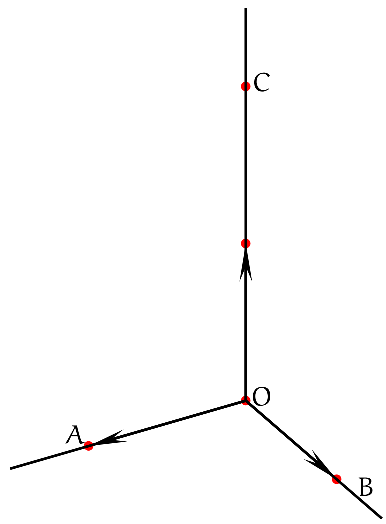
On considère les points A(1,0,0) , B(0,1,0) et C(0,0,2).

1. Le vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ est égale à :

   a. $\overrightarrow{OA}$.

   b. $2\overrightarrow{OA}$.

   c. $-2\overrightarrow{OA}$.



2. Le réel $\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AO}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$

   a. 0.

   b. $\frac{1}{3}$.

   c. 2.

3. La droite (BC) est l'intersection des plans d'équations :

   a. $x = 1$ et $2y + z - 2 = 0$.

   b. $x = 0$ et $y + 2z - 1 = 0$.

   c. $x = 0$ et $2y + z - 2 = 0$.

4. Une équation de la sphère de centre O et tangente au plan (ABC) est :

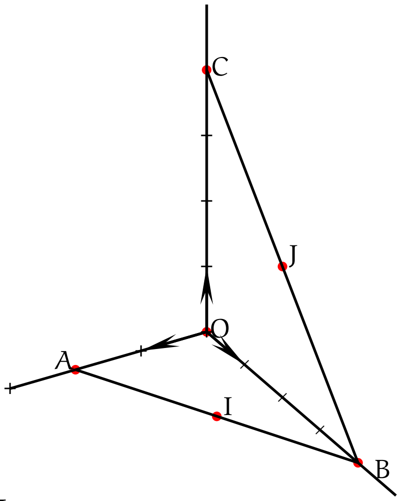
   a. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   b. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}$.

   c. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = \frac{4}{9}$.

Retour

Exercice 16 ★☆☆☆ Session de contrôle 2012



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points A(2,0,0) , B(0,4,0) et C(0,0,4) et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

1. Déterminer les coordonnées des points I et J.
2. Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MI = MJ$.
   a. Montrer que P est le plan d'équation $2x - 4z + 3 = 0$.
   b. Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.
3. Soit (S) l'ensemble des des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}z - 5 = 0$$

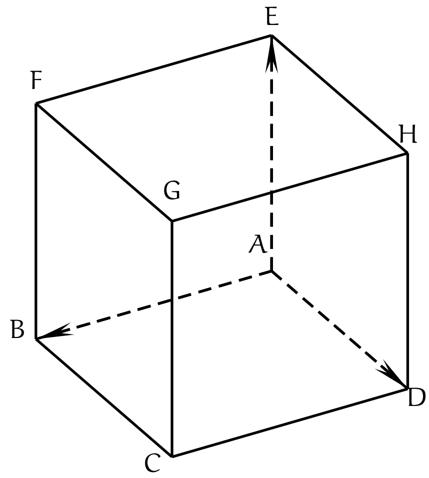
   a. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
   b. Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère (S).
   c. Montrer que (S) est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC).
4. Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère (S).

Retour

Exercice 17 ★☆☆☆ Session principale 2011

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-dessous ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. le vecteur $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ est égal à :

   a) $\overrightarrow{BG}$ **b)** $\overrightarrow{BD}$ **c)** $\overrightarrow{BA}$

2. l'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$ est la droite

   a) (CH) **b)** (CF) **c)** (CG).

3. Une équation du plan (ACE) est

   a) $x + y = 0$ **b)** $x - y = 0$ **c)** $x - y = 1$.

4. L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan d'équation $z = 1$ est

   a) un cercle **b)** un point **c)** l'ensemble vide

Retour

Exercice 18 ★☆☆☆ *Session de contrôle 2011*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x+3y+2z-6=0$.

2. Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
   On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$.

   a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.

   b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$.

3. Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O.

   a) Vérifier que (S) passe par les points A, B et C.

   b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Retour

Exercice 19 ★☆☆☆ *Session principale 2010*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1,0,0) , B(0,0,1) et C(1,-1,1) .

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   En déduire que les points A , B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$.

   b) En déduire qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est $x+y+z-1=0$.

2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$$

   a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

   b) Montrer que $S \cap \mathcal{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

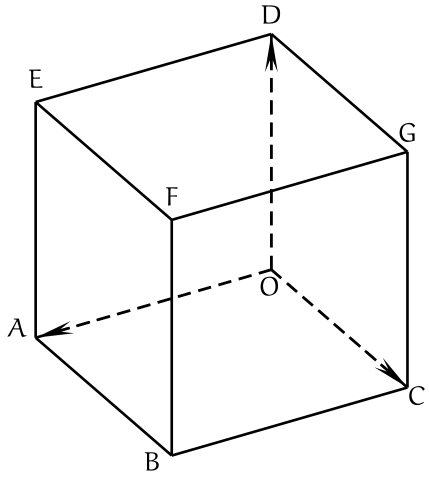
3. a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

   b) Soit α un réel et soit M un point de l'espace de coordonnées $(\alpha, 0, 2-\alpha)$.

   Montrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

Retour

EXERCICE 20 ★☆☆☆ *Session de contrôle 2010*



Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD}\right)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est :

$$x+y+z-1=0$$

2. Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD).

   a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et du plan (ACD).

3. Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2mz-1+3m^2=0$.

   a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m est le rayon r.

   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.

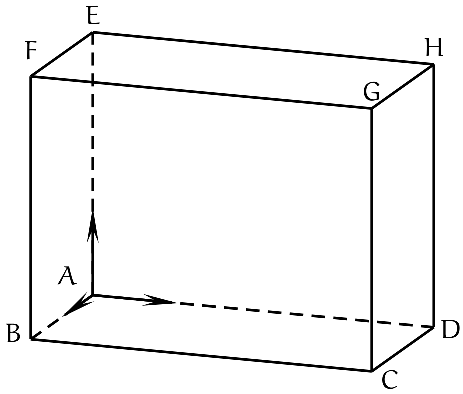
4. a) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points e la droite Δ.

   b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera.

Retour

Exercice 21 ★★☆☆

Session principale 2009



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}\right)$
ABCDEFGH est un parallélépipède tel que :

$$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{j} \text{ et } \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{k}.$$

1.
   a. Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}$.
   b. Déterminer les composantes de chacun des vecteurs :
   $$\overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{EG} \text{ et } \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}.$$
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
2. Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.
   a. Vérifier que M décrit la droite (AG)privée du point G.
   b. Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).
3. Soit $\mathcal{V}$ le volume de tétraèdre MEBG.
   a. Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de α.
   b. Calculer le volume du tétraèdre AEBG.
   c. Pour quelle valeur de α,$\mathcal{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

Retour

Exercice 22 ★☆☆☆

Session de contrôle 2009

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère :

- la droite Δ passant par le point $A(-3,-1,-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$,
- la droite D passant par le point $B(3,2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1. a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right)$.

   b) Justifier que les droites Δ et D sont orthogonales et non coplanaires.

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D.

2. Soit (S) la sphère de centre $C(-1,0,-1)$ et de rayon 6 et $\mathcal{P}$ le plan d'équation :

$$2x + y + 2z + 13 = 0$$

   a) Montrer que (S) et $\mathcal{P}$ se coupent suivant un cercle de centre A . Déterminer le rayon de ce cercle.

   b) Montrer que la droite D est tangente à la sphère (S) au point B.

3. a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment $[AB]$.

   b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ.

Retour

Exercice 23 ★★☆☆ — *Session principale 2008*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

1. a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
   Montrer que $OH = \dfrac{4}{3}$.

3. Soit (S) la sphère de centre O passant par A.

   a) Justifier que l'intersection de (S) avec le plan (ABC) est un cercle $\mathcal{C}$ de centre H.

   b) Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Retour

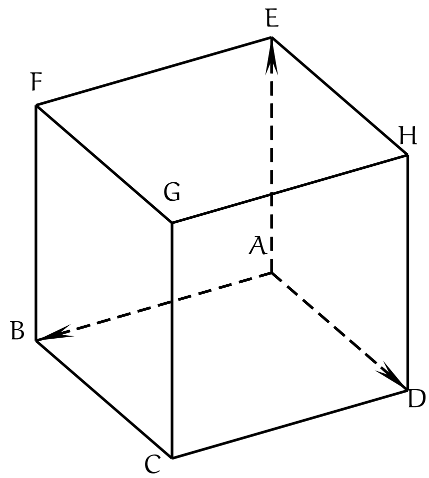
EXERCICE 24 ★☆☆☆

Session de contrôle 2008

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct :

$$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$$



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH}$ est égal à :

   a) 0 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$

2. Une équation du plan (ECG) est

   a) $x+y-2=0$ **b)** $x+y-1=0$ **c)** $x-y=0$.

3. On désigne par I le milieu du segment [EG].
   Soit (S) la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

   a. Le plan (BEG) est tangent à la sphère (S).

   b. L'intersection de la sphère (S) est le plan (BEG) est le cercle de diamètre [EG].

   c. L'intersection de la sphère (S) est le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

Retour