Logarithme Népérien

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x(1-\ln x)^2+1 & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. (a) Montrer que f est continue à droite en 0.

   (b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
3. La figure ci-dessous, on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$: la courbe Γ de la fonction dérivée f' de f et la tangente Δ á la courbe ζ au point $A(1,2)$

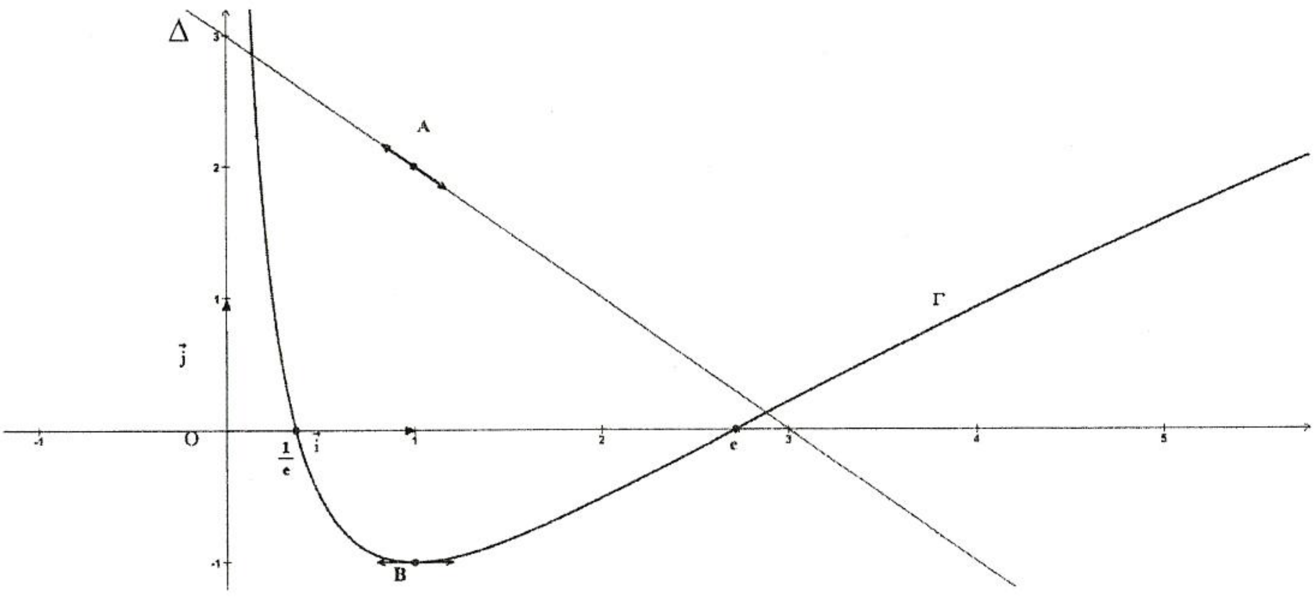
   On sait que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e et qu'elle admet au point $B(1,-1)$ une tangente horizontale.

   (a) Déterminer le signe de f'sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

   (b) Montrer que A est un point d'inflexion de la courbe ζ.
4. Tracer la courbe ζ de f dans le repére $(O,\vec{i},\vec{j})$
5. Soit $0<\lambda<\frac{1}{e}$

   On désigne par $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ de la fonction dérivée f', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\frac{1}{e}$

   Montrer que $\mathcal{A}_\lambda = 1+\frac{4}{e}-f(\lambda)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{A}_\lambda$



Exercice 2

On considere la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=-x+2x\ln x & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. (a) Montrer que f est continue à droite en 0.

   (b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpreter graphiquement le résultat obtenu.

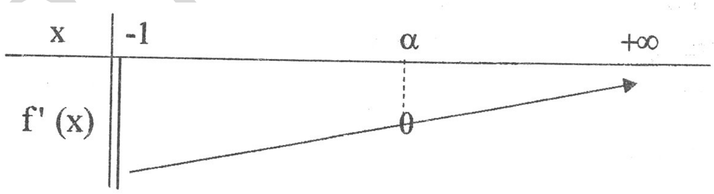
(c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Vérifier que $f(\sqrt{e}) = 0$
   (c) Déterminer le deuxième point d'intersection autre que O de la courbe (C) et de la droite Δ d'équation cartésienne $y = x$
   (d) Tracer la droite Δ et la courbe (C)
3. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[\sqrt{e}, +\infty[$ et (C_1) sa représentation graphique
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Tracer dans le même repère la courbe (C_2) de g^{-1}.
4. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, en $(u.a)$, de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \sqrt{e}$ et $x = e$ et par $\mathcal{A}'$ l'aire, en $(u.a)$, de la partie (E') limitée par les courbes $(C_1)\,,(C_2)$ et les axes des abscisses et des ordonnées.
   (a) Justifier que $\mathcal{A}' = e^2 - 2\mathcal{A}$
   (b) Montrer que $\int_{\sqrt{e}}^{e}(x\ln x)dx = \frac{1}{4}e^2$
   (c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}'$

Exercice 3

Soit f la fonction definie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = -2x + x\ln(x+1)$
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repáre orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

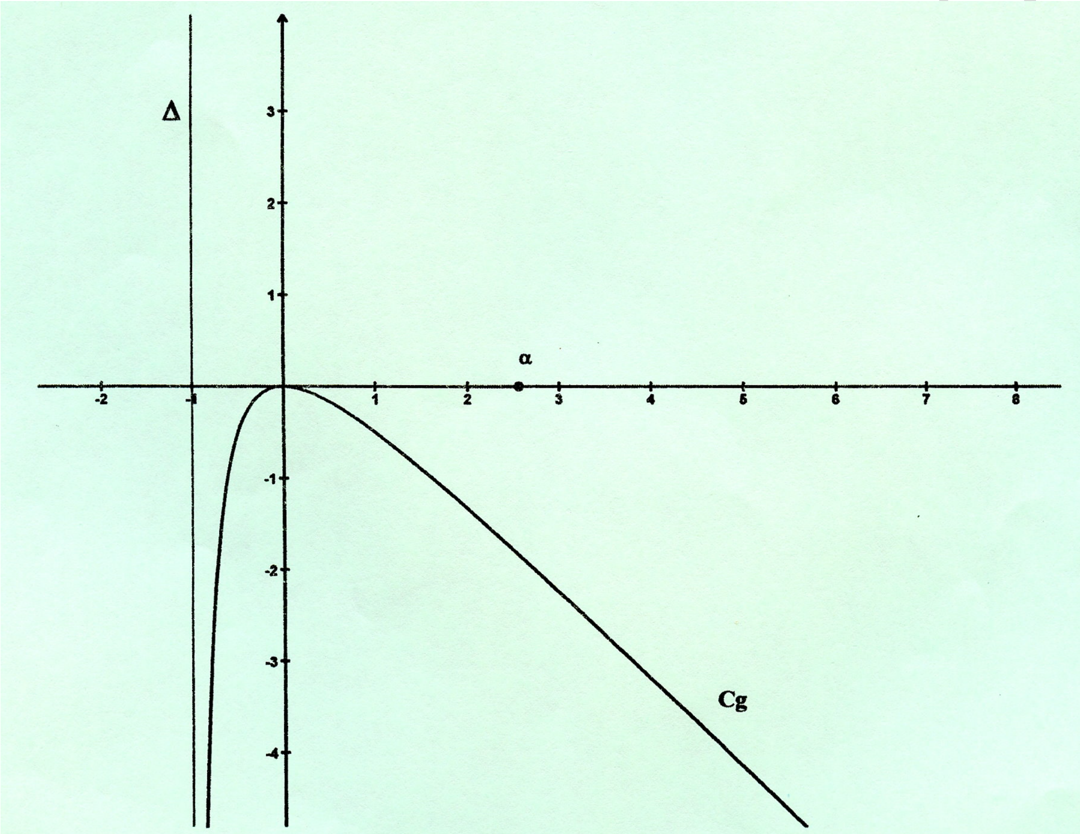
1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$; $f'(x) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1)$
   (b) Le tableau ci-dessous indique la variation de la fonction dérivée f' de f. Le réel α vérifie $f'(\alpha) = 0$



   Déterminer alors le signe de $f'(x)$ sur $]-1, +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
3. On a tracé dans le repère orthonormé $(O, \vec{i},, \vec{j})$ la courbe C_g de la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{-x^2}{x+1}$, la droite $\Delta : x = -1$ et on a placé le réel α
   (a) Vérifier que $\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ et en déduire que $f(\alpha) = g(\alpha)$
   (b) Construire le point P d'abscisse α de la courbe C_f.
4. (a) Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
   (b) Tracer C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5. (a) Vérifier que pour tout $x > -1$ on a : $g(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$
   (b) Calculer $\int_0^{\alpha} g(x)dx$

(c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$\int_0^\alpha x\ln(1+x)dx = \frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha g(x)dx$

(d) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation. $x = 0$ et $x = \alpha$
Montrer que $\mathscr{A} = \frac{3\alpha^3-\alpha^2+4}{4(\alpha+1)}$



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

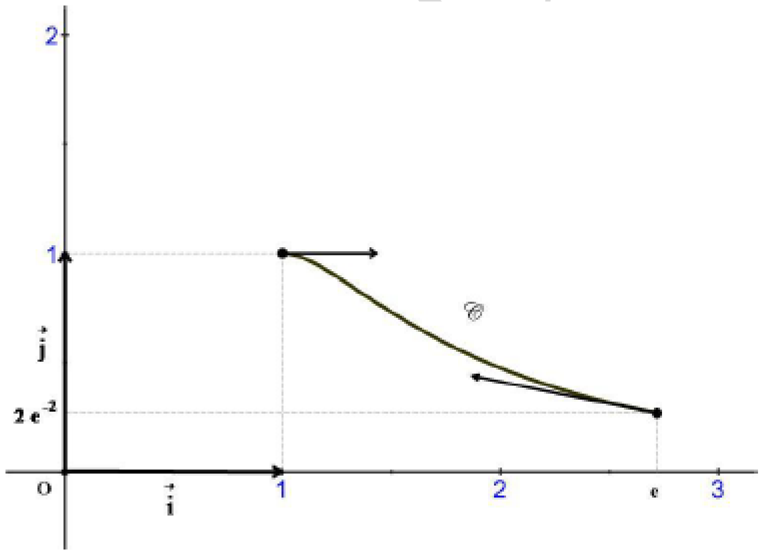
1. (a) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$
   (b) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   (d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.
   (e) Dresser le tableau de variation de f.
2. (a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.
   (b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).
   (c) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C)
3. Soit G la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = \int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}dt$
   (a) Montrer que G est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.
   (b) En déduire que pour tout x appartenant à $[0,\frac{\pi}{2}[$ $\quad G(x) = x$
   (c) Calculer alors $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

4. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
   (b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$

Exercice 5

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_1^e \frac{dx}{x^2}$ et $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. (a) Calculer I_0
   (b) Montrer que (I_n) est positive et décroissante.En déduire qu'elle est convergente.
2. (a) Montrer par une intégration par parties que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\quad nI_n \leq \frac{1}{e}$
3. (a) $n \in N^*$: Montrer que pour tout $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \frac{1}{n+1}$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n$
   Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nl_n$
4. Ci-dessous est la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur $[1;e]$ par : $f(x) = \frac{1+2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ telque : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$



   (a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = 0, x = 1$ et $x = e$.
   (b) Montrer que f est bijective de $[1;e]$ sur un intervalle J à déterminer
   (c) Construire dans l'annexe ci-joint la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction g réciproque de f
   (d) c) Calculer l'aire $\mathscr{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations : $y = 1, x = 2e^{-2}$