Exercice n°1 :

1) Montrer que quelque soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$.

2) ***a)*** Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer l'équivalence : $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\bar{z} \quad ou \quad 2z\bar{z}=z+\bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$

b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

3) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a-b|=|1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a|=1$ ou $|b|=1$.

Exercice n°2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2i\bar{z}=0$ et montrer que les points images des solutions autre que 0 forment un triangle équilatéral.

2) Soient a et b deux nombres complexe tels que $|a|=|b|=1$ et $a.b \neq -1$. Montrer que le nombre complexe $Z=\frac{a+b}{1+a.b}$ est un nombre réel.

3) Soit α un nombre complexe non nul donné. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que l'on ait $(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=4\alpha\bar{\alpha}$.

4) Soient u, v et w trois complexes tel que $|u|=|v|=|w|=1$ et que $u+v+w \neq 0$. Montrer que le nombre complexe $\frac{uv+uw+vw}{u+v+w}$ a pour module 1.

5) Soit α un nombre complexe tel que $\alpha^5=1$ et $\alpha \neq 1$.
Montrer que $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^4+\alpha+1)=\alpha(\alpha+1)$.

Exercice n°3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, on désigne par A, M' et $M"$ les points d'affixes respectives :
i ; $Z'=\cos\theta+i(1+\sin\theta)$ et $Z"=\cos\theta+i(1-\sin\theta)$.

1) ***a)*** Déterminer l'ensemble M' lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

b) On note I le milieu du segment $[M'M"]$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

2) Mettre Z' et $Z"$ sous forme trigonométrique.

3) ***a)*** Montrer que $AM'M"$ est un triangle isocèle en A.

b) Déterminer θ pour que le triangle $AM'M"$ soit équilatéral.

Exercice n°4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $Z=-cos^2(\theta)-i\cos(\theta)\sin(\theta)$ et $Z'=-sin^2(\theta)+i\cos(\theta)\sin(\theta)$. On désigne par M et M' les images respectives de Z et Z', et par I le milieu du segment $[MM']$.

1) Déterminer l'affixe du point I.

2) Montrer que OMM' est un triangle rectangle en O.

3) ***a)*** Montrer que $\left|Z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

b) En déduire sur quel ensemble varie le point M puis le point M'.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

4) Soit A le point d'affixe -1.

a) Montrer que OMAM' est un rectangle.

b) Déterminer θ pour que $OMAM'$ soit un carré.

Exercice n°5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct$(o,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A et K les points d'affixes respectives 1 et $1+i$ et pour I et J les points d'affixes respectives i et $-i$.

1) On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Soit N un point de $\mathcal{C}$ distinct de I et de J. On note$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv t[2\pi]$.

a) Quelle est la nature du triangle INJ ?

b) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\}$, le nombre $\frac{e^{it}+i}{e^{it}-i}$ est imaginaire pur.

2) On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon 1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Tracer Γ et son image Γ' par la rotation r sur une même figure qui sera complétée par la suite.

b) On note M' l'image par r d'un point quelconque M du plan. Exprimer l'affixe Z' de M' en fonction de l'affixe Z de M.

c) Déterminer l'antécédent H de K par r.

3) Dans cette question M est un point quelconque de Γ distinct de K et d'affixe Z.

On note $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\theta/2[2\pi]$.

a) Vérifier que $Z=1+e^{i\theta}$.

b) Montrer que $\frac{Z'-(1+i)}{Z-(1+i)}=i\frac{e^{i\theta}+i}{e^{i\theta}-i}$

c) Montrer que les points M,K et M' sont alignés.

d) En déduire une construction du point M' connaissant M.

Exercice n°6 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3+i(1-z)^3=0$

1) Soit a une solution(E)

a) Montrer que $|a|=|1-a|$

b) En déduire que $1-a=\bar{a}$.(On rappelle que pour tout $z\in\mathbb{C}$; $|z|^2=z\bar{z}$).

2) Soit a une solution de(E) ; on pose $a=re^{i\alpha}$, avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha\in\left]-\pi,\pi\right[$

a) Montrer que $r=\frac{1}{2\cos\alpha}$; En déduire que $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que $r^3e^{3i\alpha}+ir^3e^{-3i\alpha}=0$; En déduire les valeurs possibles de α.

3) **a)** Factoriser $z^3+i(1-z)^3$

b) En déduire que $z^3+i(1-z)^3=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}(1+i)$ ou $z^2+(2i-1)z-i=0$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(2i-1)z-i=0$

d) Déduire la valeur exact de $\tan\frac{\pi}{12}$

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Louati