

Série N°:2
(Limite Continuité)

EXERCICE N° 1 :

Calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+7}-x & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+3x+1}-x & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+3x+1}-x+2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-6x^2-4x+24}{x-2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-6x^2-4x+24}{3x^3-2x+8} & \\ \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right) \end{array}$$

EXERCICE N° 2 :I/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}{x - 3}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 3. Donner alors ce prolongement..

$$\text{II/ Soit la fonction f définie par : } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1/ Déterminer la limite de f en 2, conclure.

2/ La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

EXERCICE N° 3 :

Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est vraie.

Soit g et u deux fonctions donnés par :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$g(x)$					$u(x)$				

1/ L'équation $g(x) = 1$ admet une seule solution dans :

▪ $]-\infty, -1[$

▪ $]-1, +\infty[$

▪ $]-\infty, 2[$

2/ On a : ▪ $g \circ u(2) = -1$

▪ $g \circ u(-1) = 2$

▪ $g \circ u(-1) = 3$

3/ On a : ▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = 2$

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = 3$

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ u(x) = -1$

EXERCICE N° 4 :

$$\text{Soit la fonction f définie sur } \mathbb{R}^+ \text{ par : } f(x) = \begin{cases} f(x) = x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1/ a- Vérifier que pour tout $x > 0$; $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ b- Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.2/ a- Montrer que : $\forall x < 0, 3x \leq f(x) \leq x$ b- Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g .

4/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

EXERCICE N° 5 :

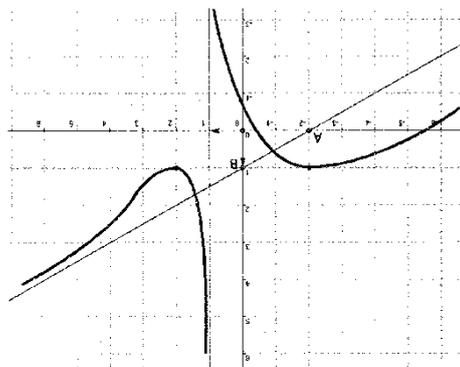
Dans le graphique ci-dessous, on tracera la courbe ζ_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et admettant :

- la droite $x = 1$ comme asymptote verticale
- la droite (AB) comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de $-\infty$.

1/ Par une lecture graphique déterminer : $f(]-\infty, -1])$; $f(]1, 3])$ et $f(]-5, -1])$.

2/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

- a- Déterminer le domaine de définition de $g \circ f$.
- b- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2} g \circ f(x)$
- c- $g \circ f$ est-elle prolongeable par continuité en 1? Si oui définir ce prolongement.



EXERCICE N° 6 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} - x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 2 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a- Montrer que pour $x > 0$, on a : $x^3 + 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^3 + 2 + x^2$

b- Montrer que f est continue en 0.

c- En déduire que f est continue sur \mathbb{R} .

3/ a- Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution $\alpha \in]-1, 0[$.

b- Montrer que : $(\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + 4$ et en déduire la valeur exacte de α .

EXERCICE N° 7 :
Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1/ a- Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

b- En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

c- Montrer que f est continue en 0.

2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3/ Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in]-2, -1[$ tel que $f(x_0) = 0$

4/ a- Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) = -1 + \frac{4}{2 + \sqrt{x}}$

b- En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

c- Déterminer alors l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par la fonction f .

5/ a- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0, 1[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

b- Montrer que : $\frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$