Limites et continuité & Nombre complexe	**Série N°5**	Niveau : $4^{ème}$ Sc.Exp & Techniques Prof : Nefzi Chokri

EXERCICE N° 1 (3 Pts)

Pour chaque question une ou plusieurs réponses sont exactes.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la ou les lettres qui correspondent à la réponse ou aux réponses choisies

1°) Soit Z un nombre complexe non nul d'argument θ .Un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\overline{Z}}$ est :

a °) $\dfrac{\pi}{3}+\theta$; b°) $\dfrac{\pi}{3}-\theta$;c°) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

2°) soit A , B et C trois points d'affixes respectives Z_A ; Z_B et Z_C vérifiant:

$\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_A} = 2i$ alors

a°) (AB) // (AC) ; b°) A ; B et C sont alignés ; c°) le triangle ABC est rectangle

3°) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ alors ona: $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x) =$

a°) 0 ; b°) $-\infty$; c°) $+\infty$

EXERCICE N° 2 (6 Pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{U}$, $\vec{V}$)

on considère les ponts A, B et C d'affixes respectives $Z_A = i$; $Z_B = i\sqrt{3}+1$ et $Z_C = -1$

1°) a°/ Donner le module et un argument de Z_A et Z_B

b°/ Ecrire Z_A et Z_B sous forme trigonométrique et exponentielle

2°) Pour tout point M du plan d'affixes z on associe le point M' d'affixes $Z' = \dfrac{iZ+i}{Z-i}$

Déterminer l'ensemble des points M (z) tel que Z' est réel

3°) a°/ Montrer que $|Z'| = \dfrac{CM}{AM}$

b°/ En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AC] le point M' décrit un cercle que l'on déterminera

<u>**EXERCICE**</u> (6 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives 1 , 2 et $1-i$.

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) : $iz^2 - 2(i-\cos\theta)z - 2\cos\theta = 0$

1/ a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b- Mettre chacune des solutions de (E) sous forme exponentielle.

2/ Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma = \left\{ M(z) \in P \,/\, \arg\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \ (2\pi) \right\}$

3/ Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$

a- Montrer que lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, chacun des points M_1 et M_2 décrit l'ensemble Γ.

b- Lorsque $M_1 \neq M_2$, on désigne par G le centre de gravité du triangle AM_1M_2.

Déterminer l'ensemble points G lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

c- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AM_1M_2 est équilatéral.

EXERCICE N° 4 (5 Pts)

La graphe ci contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $]-2, +\infty[$ .L'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et la droite D : x = - 2 est une asymptote verticale à (C)

Soit g la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

1°) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} gof(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} gof(x)$

2°) Déterminer gof ([- 1 , 0])

3°) Montrer que l'équation : $gof(x) = \frac{3}{8}$ admet une unique solution dans $[-1, 0]$