Exercice n°1 :

A. Mettre sous forme trigonométrique : $-2(1+i)^6$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; $\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i)^8}$; $(-1+i)e^{3i\frac{\pi}{4}}$; $i\cos\theta+\sin\theta$; $i\cos\theta-\sin\theta$; $\cos\theta$; $i\sin\theta$; $1+i\,cotg\,\theta$; $\frac{1}{1+i\,tg\,\theta}$; $\frac{1}{1-i\,tg\,\theta}$; $\frac{i}{1+i\,tg\,\theta}$; $\frac{i}{1-i\,tg\,\theta}$; $\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$

B. Déterminer le module et un argument de $Z=\frac{1+i\,tg\,\frac{\pi}{12}}{1-i\,tg\,\frac{\pi}{12}}$. Déduire la forme algébrique de Z.

Exercice n°2 :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$Z_1=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2=1+i$; $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice n°3 :

1. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$; $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$
2. Comment choisir l'entier n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel positif ? Soit imaginaire pur.

Exercice n°4 :

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$; Déterminer les ensembles suivants :

$$E=\{M(z)\,tel\ que\ A(1);M(z)et\ M'(1+z^2)soient\ alignés\}$$

$$F=\{\ M(z)\ tel\ que\ A(i)\ ;\ M(z)\ et\ M'(iz)\quad soient\ alignés\ \}$$

Exercice n°5 :

Dans le plan complexe on considère les points : $A\left(\frac{1+i}{2}\right)$; $B\ (2i)$ et $M(z)$.

Pour $M\neq A$ on pose : $Z'=\frac{z-2i}{2z-1-i}$

Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a) Z' est réel ***b)*** Z' est imaginaire pur ***c)*** $\arg(Z')\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice n°6 : (bac 2001)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectives : $a=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

1) ***a/*** Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres a et b

b/ Représenter les points A et B dans le repère$(o,\vec{u},\vec{v})$.

2) On pose $z=a+b$ et on désigne par M le point d'affixe z

a/ Montrer que $OBMA$ est un carré.

b/ Donner la forme trigonométrique de z

c/ calcules : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice n°7 :

Soit $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

1) ***a)*** Vérifier que $Z^5-1=0$

b) Factoriser Z^5-1 et en déduire que $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0$

2) ***a)*** Exprimer Z, Z^2, Z^3 et Z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités : $Z+Z^4=2\cos\frac{2\pi}{5}$; $Z^2+Z^3=2\cos\frac{4\pi}{5}$

Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine de l'équation $4x^2+2x-1=0$

En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

Exercice n°8 :

Soit $Z=\frac{1}{2}(1+e^{i\theta})$ ou $\theta\in\,]-\pi,\pi[$

1) Calculer $(1+e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{2}}$. En déduire un argument de $1+e^{i\theta}$

2) Trouver le module et un argument de Z.

Exercice n°9 :

Soit $\theta\in\,]-\pi,\pi[$; On pose $z=\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$

1) Montrer que z est imaginaire pur.

2) Montrer que $1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$; $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

3) Donner le module et un argument de z

4) Trouver θ pour $|z|=\sqrt{3}$

Exercice n°10 :

1) Montrer que $1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{2i\frac{\pi}{n}}+\cdots+e^{i(n-1)\frac{\pi}{n}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$ n un entier naturel non nul

2) En déduire que $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin(n-1)\frac{\pi}{n}=cotg(\frac{\pi}{2n})$

3) Soit $S_n=\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin(n-1)\frac{\pi}{n}$

a) Calculer $\lim\limits_{t\mapsto 0} t\,cotg(\frac{\pi}{2}t)$

Devoir.tn toutes les matières, tous les niveaux

Louati

b) En déduire que $\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

Exercice n°11 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\,)$.

Soit la fonction g :$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\,;\, z \;\mapsto g(z) = \frac{iz^2}{|z-1|^2+\bar{z}-1}$

1) ***a)*** Déterminer le domaine de définition de la fonction g

b) Montrer que pour tout $z \in Dg$ on a : $g(z) = \frac{iz}{\bar{z}-1}$

c) Déterminer est construire l'ensemble $\mathcal{P}$:$\{M(z)/g(z) \in i\mathbb{R}\}$

2) Soit M et M' les deux points d'affixes respectives $z \in Dg$ et $z' = g(z)$

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{IM}}\right) + \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

En déduire l'ensemble $\mathcal{D}$: $\{M(z) \in P/\ O, M$ et M' sont alignés$\}$

b) Montrer que $M \in med[OI]\ \ ssi\ \ z' = -i$

3) Soit $\theta \in\,]0,2\pi[$ déterminer en fonction de θ,la forme trigonométrique de $g(e^{i\theta})$. Déterminer et construire alors les points $M(e^{i\theta})$ tel que : $M'\left(g\left(e^{i\theta}\right)\right) \in \Delta\text{: } y = x$

Exercice n°12 :

1) Montrer que $1 + e^{i\propto} = 2\cos\frac{\propto}{2}\, e^{i\frac{\propto}{2}}$

2) Montrer que $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, e^{i\propto k} = 2^n cos^n\ \left(\frac{\propto}{2}\right) e^{i\frac{n\propto}{2}}$

3) En déduire $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(\propto k)$ et $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin(\propto k)$

Exercice n°13:

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et (-1) et on désigne par $\mathcal{P}'$ le plan $\mathcal{P}$ privé du point A. Soit f l'application de $\mathcal{P}'$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}'$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe z tel que $z' = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$

1) ***a)*** Soit C le point d'affixe i . Déterminer $f(C)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{C}\setminus\{A\}$ on a $f(M) = B$

2) Déterminer l'ensemble des points invariants f.

3) Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle $\mathcal{C}$. On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

a) Vérifier que $\frac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \frac{\bar{Z}-Z}{|Z-1|^2}$ et en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c) En déduire une construction géométrique du point M'.

Exercice n°14:

Soit $z = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

Calculer z^2 puis z^{12}

Exercice n°15:

Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

1) Déterminer le module et un argument de $z' = (1 + i)z$

2) En déduire le module et un argument de z.

Louati

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux