Exercice 1 (Ds 1 2016-2017)

1. (a) Vérifier que : $\left(1+\sqrt{3}+2i\right)^2 = 2\sqrt{3}+4i\left(1+\sqrt{3}\right)$
   (b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :$z^2-(3+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i)=0$
2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1-i$,$z_B=2+\sqrt{3}+i$ et $z_C=2$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre C et de rayon 2.
   (a) Vérifier que $B\in\mathscr{C}$.
   (b) Placer les points A et C .Construire alors le point B .
3. (a) Écrire z_A sous forme exponentielle.
   (b) Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique .
   (c) Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (d) En déduire la forme exponentielle de z_B .
   (e) Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3-2(1+i)z^2+2(1+2i)z-4i=0$

1. (a) Montrer que (E), admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure que l'on déterminera
   (b) Résoudre (E).
   (c) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.
   Soient A et B les points d'affixes respectives : $2i$ et $1+i$. A tout nombre complexe $z\neq 1+i$, on associe le complexe $z'=\dfrac{z-2i}{z-1-i}$.
2. Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle.
3. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   (a) Montrer que $A\in(E)$.
   (b) Déterminer et construire l'ensemble (E).
4. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que : $|z'|=1$.

Exercice 3 (Bac 2014 ctr)

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^2-\sqrt{2}\,(1-i)\,z-2i=0$.

1. (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.
   (b) Résoudre l'équation (E).
2. (a) Donner l'écriture exponentielle de $1-i$.
   (b) Vérifier que pour tout nombre complexe z : $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2-\sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)-2i=-2i(z^2-z+1)$
   (c) Montrer que les solutions de l'équation : $z^2-z+1=0$ sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   (d) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).
3. Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_\theta : iz^2 + e^{i2\theta}z + i(e^{i2\theta} + 1) = 0$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Et soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation E_θ .

1. (a) Montrer que : $1 + e^{i2\theta} = 2\cos\theta e^{i\theta}$.
   (b) Sans calculer z_1 et z_2 , montrer que $arg\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   (c) Déterminer la valeur de θ pour que $z_1 + z_2 = -1$.
2. (a) Calculer $\left(e^{i2\theta} + 2\right)^2$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit A et M les points d'affixe respectives $z_A = -i$ et $z_M = i\left(1 + e^{i2\theta}\right)$.
   (a) Ecrire z_M sous forme trigonométrique .
   (b) Déterminer θ pour que le triangle OAM est un triangle isocèle en O .
   (c) Déterminer et construire l'ensemble des points M quand θ varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right.$?.

Exercice 5

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^2 + (7 + i\sqrt{3})z - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0$
   (a) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   (b) Donner alors l'autre solution de (E).
2. (a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : 2z^4 + (7 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0$.
3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et on désigne par I le milieu du segment $[OA]$
   (a) Ecrire z_B sous forme exponentielle
   (b) Placer I et B et montrer que le triangle OIB est isocèle.

.

Exercice 6 **(Bac 2006 princ)**

I) Résoudre dans l'équation : $z^2 + iz - i = 0$.

II) θ étant un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 + (2i\sin\theta)z - 2i\cos\theta = 0$.

1. (a) Vérifier que $(\cos\theta + i)^2 = -sin^2\theta + 2i\cos\theta$.
   (b) Résoudre l'équation (E).
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $a = i, b = \cos\theta + (1 - \sin\theta)i$ et $c = -\cos\theta - (1 + sin\theta)i$.
   (a) Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.
   (b) Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O. Quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice 7

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$, on considère l'équation $(E) : z^2 - 2i\sin\theta z + 2(\cos\theta 1) = 0$.

1. (a) Vérifier que pour tout réel θ, on a : $(1 - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta - 2(\cos\theta - 1)$.
   (b) Résoudre, alors, dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

(c) Ecrire les solutions de (E_θ) sous forme exponentielle.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soient les deux points M et N d'affixes respectives :$-1+e^{i\theta}$ et $1-e^{-i\theta}$.

2. (a) Déterminer les ensembles sur les quels varient les deux points M et Nlorsque θ varie sur $]0,\pi[$.

   (b) Montrer que pour tout réel θ de l'intervalle $]0,\pi[$, on a OMN est un triangle isocèle en O.

   (c) Déterminer la valeur de θ pour que OMN soit un triangle rectangle.

Exercice 8 (Bac 2017 ctr)

A/

1. (a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

   (b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

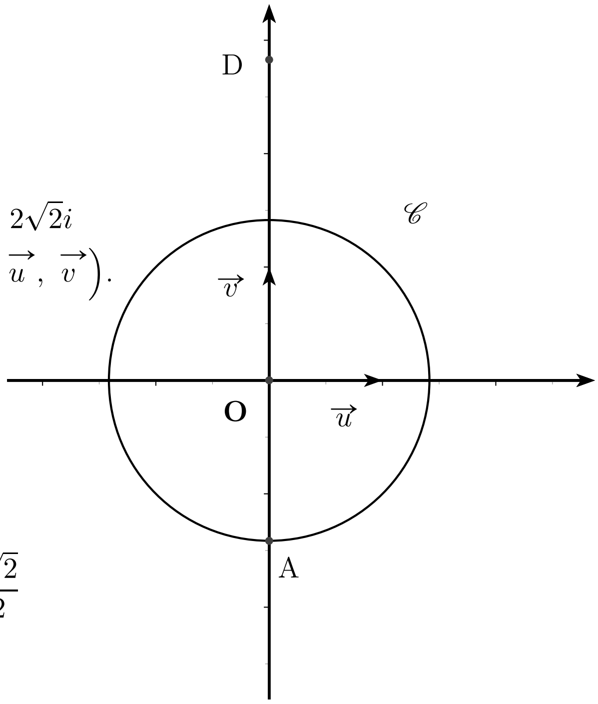
   Dans la figure de l'annexe ci-jointe :
   — $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   — A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2}i$ et $z_D = 2\sqrt{2}i$.

   (a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

   (b) Vérifier que $z_B = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C = \dfrac{-\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (c) Montrer que $(BC)\perp(AD)$.

   (d) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.



B/

Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes respectives $z_M = \alpha, z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

1. (a) Calculer z_N^3 et z_P^3 .

   (b) En déduire la nature du triangle MNP .

2. Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$

   (a) Montrer que : (le quadrilatère $MNQP$ est un losange) équivaut à $(\alpha^3 = -2\alpha)$.

   (b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $MNQP$ est un losange.

Exercice 9 (Bac 2015 ctr)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0$.

1. (a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

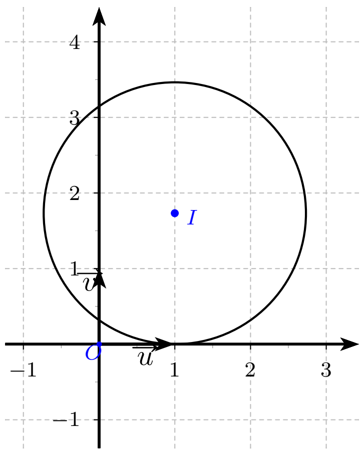
   (b) Résoudre l'équation (E) . On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2. Dans l'annexe ci-jointe, $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$est un repère orthonormé direct du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point I d'affixe $z_I = 1 + i\sqrt{3}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

   (a) Écrire z_I , sous forme exponentielle.

   (b) La droite (OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B tels que $OA < OB$. Placer A et B, puis justifier que $OA = 2-\sqrt{3}$ et $OB = 2+\sqrt{3}$

   (c) En déduire que les affixes respectives z_A et z_B des points A et B sont les solutions. de l'équation (E).



Exercice 10 **(Bac 2015 princ)**

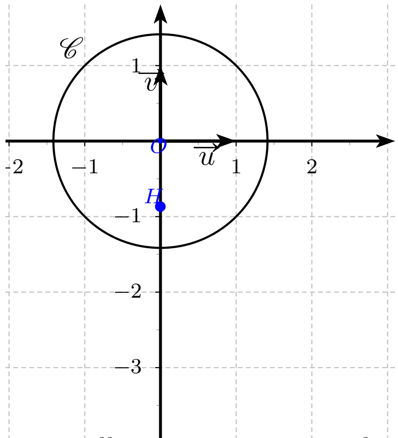
Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1) , $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$est un repère orthonormé direct du plan et C est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1. Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.
   (a) Montrer que A appartient à (C)
   (b) Placer A.
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.
   (a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation E est $12a^2$.
   (b) En déduire que les solutions de léquation E sont :$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i\left(1 - \sqrt{2}\right)\right]$ et $z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$
3. On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives .
   (a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.
   (b) Montrer que : $\dfrac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$. En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).
   (c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.
   (d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2.

Exercice 11 **(Bac 2014 princ)**

1. Soit les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.
   (b) En déduire que, pour tout nombre complexe z, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$.

   Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$,et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\dfrac{-i\sqrt{3}}{2}$.

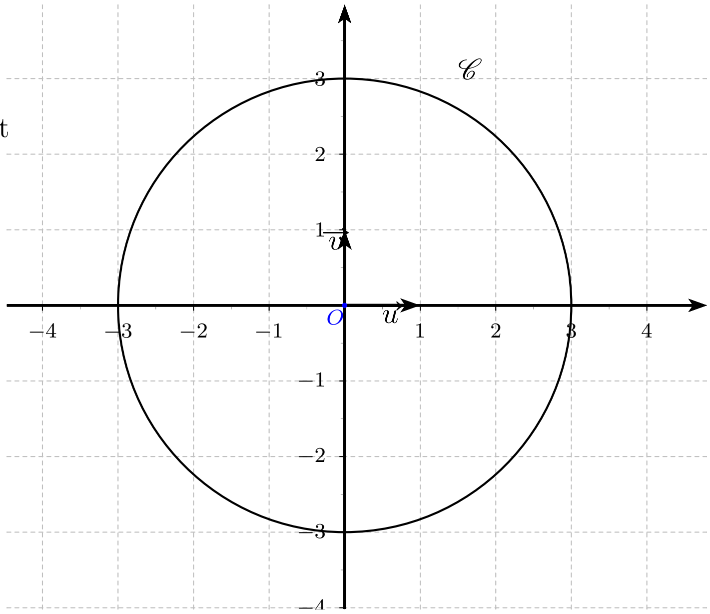


   (a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).
   (b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.
   (c) Construire les points M_1 et M_2.
3. Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$. Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.
   (a) Montrer que : (K est le milieu du segment $[MN]$) si et seulement si $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.
   (b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$.
   (c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.
   (d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3 (On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2.
   (e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{u})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.

Exercice 12 **(Bac 2017 princ)**

1. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - \left(\sqrt{5} + 2i\right) z + 1 + 4\sqrt{5}i$
   (a) Calculer $\left(\sqrt{5} + 2i\right)^2$.
   (b) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -3\left(\sqrt{5} + 2i\right)^2$
   (c) En déduire que les solutions de (E) sont $a = (\sqrt{5} + 2i)\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $b = (\sqrt{5} + 2i)\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$

   Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$est un repère orthonormé direct du plan, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 3.
2. Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5} + 2i$
   (a) Montrer que le point Q appartient à $(\mathscr{C})$.
   (b) Construire alors le point Q.
3. Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.
   (a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$.
   (b) Vérifier que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$.
   (c) En déduire que le quadrilatère $OAQB$ est un losange.
   (d) Construire alors les points A et B.



Exercice 13 **(Bac 2016 princ)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.On considère les points et B d'affixes respectives $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. (a) Construire dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$les points A et B.
   (b) Ecrire a et b sous forme algébrique.
2. La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A, et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.
   (a) Déterminer l'affixe c du point C
   (b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$
3. On considère le point D d'affixe c^2 .
   (a) Montrer que $OD = 5$.
   (b) En déduire une construction du point D.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2z - i = 0$. On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives. Et par z_2 l'autre solution.
5. 2) Soit les points $I, M_1 et M_2$ d'affixes respectives 1 , z_1 et z$_2$.
   6. Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$
   7. Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.
   8. Construire les points M_1 et M_2

Exercice 14 **(Bac 2018 princ)**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$. (On donnera les solutions sous forme exponentielle).
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,on pose $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$.
   Vérifier que $P(i\sqrt{3}) = 0$ et que $P(e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$.
3. (a) Montrer que pour tout nombre complexe non non nul nul z ,$P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{1}{z^4}P(z)$
   (b) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct . On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   (a) Construire les points A, B et C.
   (b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous La forme cartésienne.
   (c) La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E. Déterminer l'affixe du point E.

Exercice 15 **(Bac 2018 ctr)**

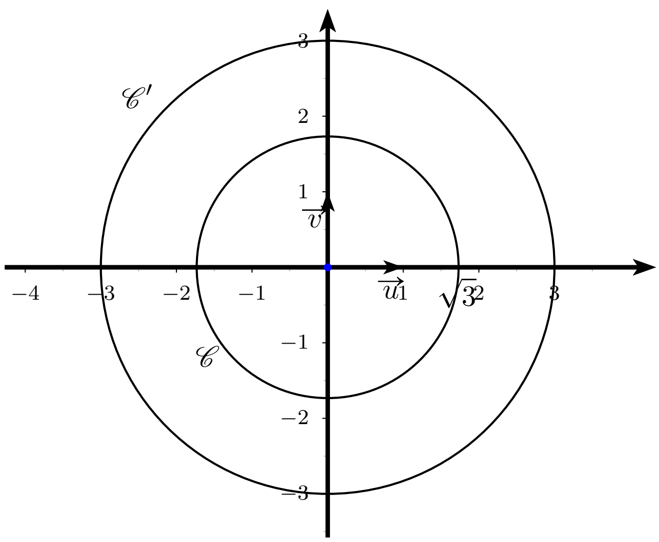
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, (C) et $(C)'$ sont deux cercles de même centre O et de rayons respectifs $\sqrt{3}$ et 3.

I)

1. On considère le point P d'affixe $p = \sqrt{2} + i$.
   (a) Vérifier que le point P appartient à (C).
   (b) Construire le point P.
   On désigne par α un argument du nombre p. Donner l'écriture exponentielle de p.
2. Soit Q le point du cercle $(C)'$ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}}\right) \equiv \alpha[2\pi]$ .On note q l'affixe du point Q.
   (a) Donner une mesure de l'angle orienté$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OQ}\right)$.
   (b) Ecrire le nombre complexe q sous forme exponentielle.
   (c) En déduire que $p^2 = q$ puis que $q = 1 + 2\sqrt{2}i$.

(II) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe, les équations
$(E) : 16z^2 - 8z + 9 = 0$ et $(E') : 16z^4 - 8z^2 + 9 = 0$

1. (a) Montrer que les solutions de l'équation (E) sont les nombres $\frac{q}{4}$ et $\frac{\bar{q}}{4}$
   (b) En déduire les solutions de l'équation (E').
2. (a) onstruire dans l'annexe les points images des solutions de (E').
   (b) Montrer que ces points sont les sommets d'un rectangle.



EXERCICE 16 **Ds 1 2018-2019** Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

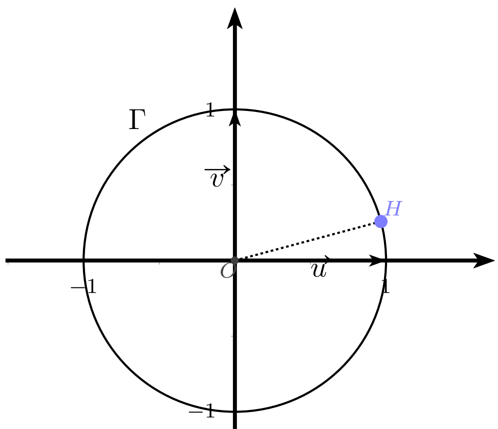
On considère les points $A(1)$ et $B(i)$ et on désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $4z^2 - 4i^{-i\theta}z + 1-^{-2i\theta} = 0$.
2. Pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, on désigne par M le point d'affixe ${}^{i\theta}$ et par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = \dfrac{i\left({}^{-i\theta}+1\right)}{2}$ et $z_2 = \dfrac{i\left({}^{-i\theta}-1\right)}{2}$
   (a) Montrer que $M \in \mathscr{C}$
   (b) Montrer que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{BO}$.
   (c) Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{BM_1}}}{z_{\overrightarrow{OM_1}}} = -i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. En déduire que M_1 appartient au cercle de diamètre $[OB]$.
3. (a) Mettre z_1 sous la forme exponentielle.
   (b) La bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en N.
   Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
4. Dans la figure de la page annexe, construire le point M_1 puis le point M_2 pour M un point donné du cercle $\mathscr{C}$ privé de A.
5. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $(2i\overline{z}-1)^3 = -i$.
   (a) Déterminer les racines cubiques de $-i$.
   (b) Déterminer alors les valeurs de θ de $\left]-\pi, \pi\right[$ pour les quelles les solutions de (E') sont les affixes des points M_1.

EXERCICE 17 **Bac sc exp ctr 2019**

1. (a) Vérifier que $(3+2i)^2 = 5+12i$.
   (b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E_2) : $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$
2. Déduire alors l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation : (E) : $z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = 0$
3. Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i, 1-2i, -1-i$ et $-1+i$.
   (a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   (b) Montrer que ABCD est un trapèze.
   (c) Calculer l'aire de ce trapèze.

EXERCICE 18 **Bac sc exp Princ 2019**



1. Soit le nombre complexe a défini par $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$
   (a) Montrer que $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
   (b) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
2. (a) Vérifier que $a^4 = 8(1-i\sqrt{3})$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$.
   (c) Dans la figure ci contre,
   le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, Γ est le cercle trigonométrique et H est le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{12}}$

   Placer les images des solutions de l'équation (E).