Exercice1

A) (Bac Sc Juin 2011-contrôle)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z-7+i\ \ =0$ sont $1+2i$ et $-1+3i$.

3) Soit z et z′ deux nombres complexes non nuls. Si $arg\left(z'\right)\equiv -\,arg\left(z\right)[2\pi]$ alors $z'=\bar{z}$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^8$ est $2^8e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

B) (Bac Tech Juin 2010-contrôle)

1) L'équation $(z-i)(z^2+4)=0$ admet dans $\mathbb{C}$:

a) une unique solution **b)** exactement deux solutions **c)** exactement trois solutions.

2) Le nombre complexe $\left(1-i\right).e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égal à :

a) 2 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $2i$

C) (Bac Tech Juin 2009-contrôle)

1) La forme exponentielle du nombre complexe $-\sqrt{3}-i$ est :

a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **b)** $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **c)** $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ **.**

2) Le conjugué du nombre complexe $1+i.z^2$ est :

a) $1-i.z^2$ **b)** $1-i.\bar{z}^2$ **c)** $-1-i.z^2$

3) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Le module du nombre complexe $1+e^{i\theta}$ est :

a) $1+\left|e^{i\theta}\right|$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{2\left(1+\cos\theta\right)}$.

D) (Bac Tech Juin 2008-principale)

1) La forme algébrique de $\left(3-2i\right)^2$ est :

a) $-5+12i$ **b)** $5-12i$ **c)** $5+12i$

2) La forme exponentielle du nombre complexe $-1-i\sqrt{3}$ est :

a) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ **b)** $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ **c)** $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right): z^2-(1+5i)z+10i=0$.

a) La somme des racines de (E) est égale à $-1-5i$.

b) Le produit des racines de (E) est égal à $10i$.

c) $2i$ est une racine de l'équation (E).

Exercice2(Bac Sc Juin 2012- principale)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a=\sqrt{3}+i$.

1) a/ Donner la forme exponentielle de a .

b/ Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b=\dfrac{a-1}{1-\overline{a}}$.

a/ Vérifier que $b\overline{b}=1$. En déduire que le point B appartient au cercle ($\mathscr{C}$).

b/ Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c/ Construire le point B dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

3) Soit θ un argument du nombre complexe b. Montrer que $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

On désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement le résultat.

b. Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner une équation de la demi-tangente à C_f au point O.

d. Montrer que $\forall x>0,\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

e. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b. Montrer que $\forall x\in J,\ f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$. f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

c. Tracer les courbes C_f et (Γ) respectives de f et de f^{-1} dans le même repère.

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}U_0 \text{ donné}\\ U_{n+1}=U_n\sqrt{1+U_n}\end{cases}$.

1. On suppose que $U_0=-\dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};-1<U_n<0$.

b. Montrer que (U_n) est croissante.

c. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2. On suppose que $U_0>0$.

a. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};0<U_n$.

b. Montrer que (U_n) est croissante.

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};U_{n+1}\geq\sqrt{1+U_0}\,.U_n$

d. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N};U_n\geq\left(\sqrt{1+U_0}\right)^n.U_0$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.