

# Suites réelles



(Révision : Bac-2020)

## Définition

Une suite  $(u_n)$  peut-être définie :

- de manière explicite :  $u_n = f(n)$
- de manière récurrente : 
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

## Variations

- Si pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n > 0$  ou  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, (u_n > 0)$  alors la suite  $(u_n)$  est **strictement croissante**
- Si pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n < 0$  ou  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, (u_n > 0)$  alors la suite  $(u_n)$  est **strictement décroissante**

## Suites arithmétiques

Réurrence :  $u_{n+1} = u_n + r$  (de raison  $r$ )

Explicite :  $u_n = u_0 + nr$  ou  $u_n = u_p + (n - p)r$

Somme : nbre termes  $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

## Suites géométriques

Réurrence :  $u_{n+1} = q \times u_n$  (de raison  $q$ )

Explicite :  $u_n = u_0 \times q^n$  ou  $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme  $\times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$

$$S_n = 1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

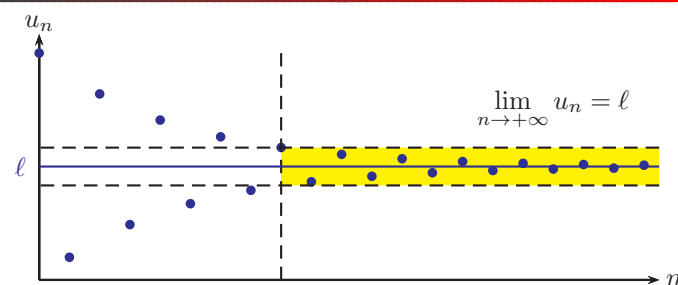
## Raisonnement par récurrence

**But** : montrer qu'une propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$

- Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang  $n_0$
- Récurrence : on montre que si la propriété est vraie au rang  $n$ , alors elle est encore vraie au rang  $n + 1$

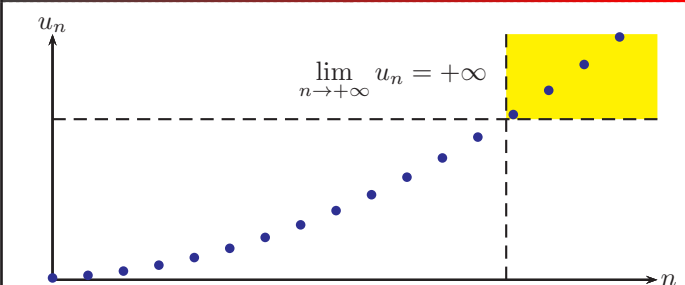
**Conclusion** : la propriété est vraie pour tout  $n \geq n_0$

## Limite finie (convergence)



Ex :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n)$  n'existe pas

## Limite infinie (divergence)



Ex :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/3} = +\infty$

## Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$  sont trois suites. Si à partir d'un rang :

- $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- $u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

## Limites d'une suite géométrique

- Si  $q \leq -1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  n'existe pas
- Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si  $q = 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si  $q \geq 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$



## Convergence d'une suite monotone

Une suite  $(u_n)$  est **majorée** [resp. **minorée**] si, et seulement si, il existe un réel  $M$  [resp.  $m$ ] tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$  [resp.  $u_n \geq m$ ]. Si la suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée

- Toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge
- Une suite croissante de limite  $\ell$  est majorée par  $\ell$