Nombres Complexes

Mr Chortani

Exercice 1

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1) $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C)

le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$

1)Soit A le point d'affixe $a = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right)$ et θ un argument de a

a) Montrer que A appartient au cercle (C)

b) Placer le point A

2)Soit dans C l'équation (E): $z^2 - 2az + 2a^2 = 0$

a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est que $\Delta = -4a^2$

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont

$$b = (1+i)\left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right) \quad et \quad c = (1-i)\left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right)$$

d) Ecrire en fonction de θ sous forme exponentielle les nombres complexes, a , b et c

3)Soient B et C les points d'affixe respectives b et c

a) Vérifier que A est le milieu du segment [BC]

b) Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle en A

c)Placer alors les points B et C

d)Calculer l'aire du triangle OBC

4)Soit $d = \frac{1}{2}bc$ et D le point d'affixe d

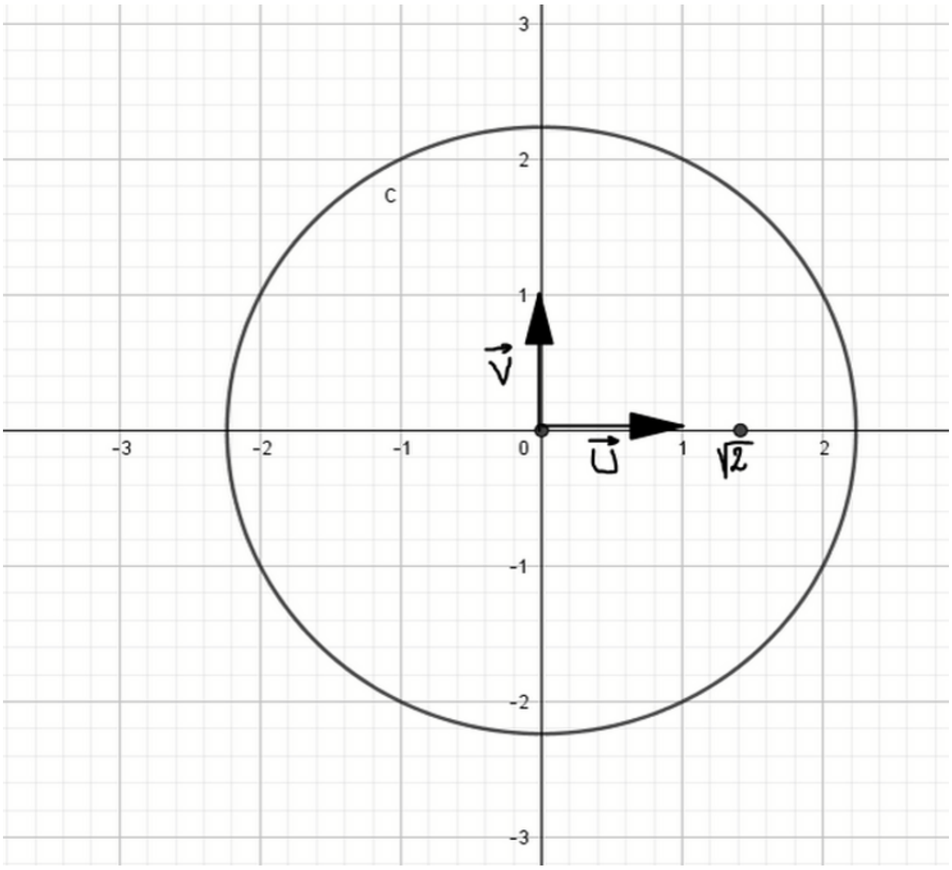
a) Vérifier que $d = a^2$

b) Montrer que OD=5 et que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OD}}\right) \equiv 2\theta[2\pi]$

c)Placer le point D.

5)a) Ecrire d sous forme algébrique

b) En déduire que $\cos(2\theta) = \dfrac{-1}{5}$ et $\sin(2\theta) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$



Exercice 2

Soit a un nombre complexe diffèrent de 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

1)a) Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -4(a-1)^2$

b) En déduire que les solutions de (E) sont $z_1 = \dfrac{a-1}{2}(1-i)$ et $z_2 = \dfrac{a-1}{2}(1+i)$

2)Dans la suite de l'exercice on prend $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Montrer que $a - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Déduire alors les formes trigonométriques de z_1 *et* z_2

3)**a**) Vérifier que $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\sin\frac{5\pi}{12}$ *et* $\cos\frac{5\pi}{12}$

4)Le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A , M_1 *et* M_2 d'affixes respectives $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, z_1 *et* z_2

a) Vérifier que $z_1 + z_2 = a - 1$ *et* $\dfrac{z_2}{z_1} = i$

b) En déduire que $OM_1\,A\,M_2$ est un carré

c) Placer alors dans le repère$(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M_1 *et* M_2

6)Soit $\mathcal{C} = \left\{M(z) \in P \text{ tel que } \frac{z-z_1}{z-z_2} \text{ est imagiaire}\right\}$

Montrer $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [OA] privé du point M_2

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)z+i=0$
2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation (E): $z^2-2e^{i\theta}\cos\theta\, z+e^{2i\theta}=0$

a)Vérifier que 1 est une solution de (E) .

b) En déduire l'autre solution de E .

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,on considère les points A et B et C d'affixes respectives : 1 , $e^{i\theta}$ et $1+\ e^{i\theta}$.

a)Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

c)Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire de losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

1) Ecrire les nombres complexes $\alpha=1+i$ et $b=-\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$ sous forme exponentielles.
2) Soit l'équation (E) : $2z^2-\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})z+(-1+i\sqrt{3})=0$
   a) Calculer le discriminant Δ de l'équation (E).
   b) Vérifier que : $4-4i\sqrt{3}=\left(2(1-i)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$ et que $b=-2(1+i)e^{i\frac{\pi}{12}}$
   c) Déterminer les solutions de (E).

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $z_A=e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_B=ie^{i\frac{\pi}{12}}$ $Z_C=1+i$ et $z_D=z_A+z_B$
   a) Ecrire z_D sous forme exponentielle puis placer dans le repère les points C et D.
   b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.
   c) Déduire que OADB est un carré.
   d) Vérifier que A et B appartient au même cercle de centre O dont on précisera son rayon.
   e) Construire dans le même repère les points A et B en expliquant votre méthode.

Exercice 5

1) a) Vérifier que $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans ¢ l'équation (E) : $\boldsymbol{z^2 - 2z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0}$

c) Déterminer dans ¢ les solutions de l'équation (F) : $\boldsymbol{z^2 - 2z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0}$

2) soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère dans ¢ l'équation (E_θ) : $\boldsymbol{z^2 - 2z - 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0}$

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ).

a) Montrer que $arg(z_1) + arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Résoudre dans ¢ l'équation (E_θ).

3) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe. On désigne par A, M et N les points

d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$

a) Montrer que $z_N = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\forall \theta \in]0, \pi[$

b) En déduire une écriture exponentielle des nombres complexes z_M et z_N.

4) a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.

b) Montrer que le quadrilatère OMAN est un rectangle.

Exercice 6

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm).
On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2$.
Soit ξ le cercle de centre C et de rayon 2.

1) a) Vérifier que $B \in \xi$.

b) Placer les points A et C. Construire alors le point B.

2) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d) En déduire la forme exponentielle de z_B.

e) Déterminer alors la valeur exacte de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tel que : $|z| = |\bar{z} - 1 - i|$.

4) Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel.

b) Montrer que OM' $= 3\,\frac{AM}{CM}$.

c) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$; le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.