|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **MR Fehri Bechir** | **Series : Complexe** | **Bac Sci 2021** |

**Exercice n°1 :**

 Dans un plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d’affixes respectives i et $i\sqrt{3}$. A tout point M du plan d’affixe z (z≠$ i\sqrt{3}$) on associe le point M’ d’affixe z’ défini par $z^{'}=\frac{z-i}{z-i\sqrt{3}}$.

1. Dans cette question, on prend z=1
	1. Donner la forme algébrique de z’
	2. Donner la fore trigonométrique de z’. En déduire les valeurs de cos $\frac{π}{12} et\sin(\frac{π}{12})$
2. Déterminer l’ensemble E des points M du plan P tels que : |z’|=1.
3. On suppose que z≠i et z≠$ i\sqrt{3}$
	1. Montrer que $\left(\overline{u;OM'}\right)=\left(\overline{BM;AM}\right)=[2π]$
	2. En déduire l’ensemble F des points M du plan P tels que z’ soit un réel strictement négatif.

**Exercice n°2 :**

Dans le plan muni d’un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$ on donne les points A(-i) et B(i). Soit f l’application : P\{A}🡪 P ; M(z)🡪M’(z’) tel que z’=$\frac{z-i}{z+i}$

1. Déterminer l’ensemble des points M(z) tels que z’ est réel.
2. Déterminer l’ensemble des points M(z) tels que |z’|=1.
3. a/ Vérifier que (z’-1)(z+i)=-2i

b/ Montrer que si M∈ζ(A,i) alors M’ appartient à un cercle ζ’ que l’on caractérisera.

1. On pose z=eiθ avec θ∈$\left]-\frac{π}{2};\frac{π}{2}\right[$

a/ Vérifier que eiθ -i=2i sin $\left(\frac{0}{2}-\frac{π}{4}\right)e^{i}^{\left(\frac{θ}{2}+\frac{π}{4}\right)}$ et que eiθ+i=2cos $\left(\frac{0}{2}-\frac{π}{4}\right)e^{i}^{\left(\frac{θ}{2}+\frac{π}{4}\right)}$

**Exercice n°3 :**

 Dans un plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$, on considère les points M’ et M’ d’affixes respectives z’=1+ ieiθ et z’’=1- eiθ avec -$\frac{π}{2}$<0<$\frac{π}{2}$

1. Ecrire z’ et z’’ sous forme exponentielle.
2. Calculer $\frac{z''}{z'}$ en déduire que OM’M’’ est un triangle rectangle.
3. Déterminer 0 pour que OM’M’’ soit isocèle.

**Exercice n°4 :**

 Le plan complexe P est muni d’un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$, on désigne par M1 et M2 les points d’affixes respectives z1=$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{iθ} et $z2=$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{iθ}$

a/ Montrer que les points M1 et M2 appartiennent à bun même cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

b/ Montrer que $\frac{z\_{1}}{z\_{2}}$= $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

c/ En déduire que OM1M2 est un triangle équilatéral.

**Exercice n°5 :**

Dans le plan complexe P rapporte à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$ on considère les points I et A d’affixes respective 1 et i. soit z un nombre complexe différent de 1, on désigne par M le point d’affixe z et par M’ le point d’affixe z’=$\frac{iz}{z-1}$

1. Déterminer les points M pour lesquels z’=z
2. Déterminer l’ensemble (ι) des points M tel que les vecteurs $\vec{OM} et \vec{OM'}$sont colinéaires
3. Montrer que AM’x IM=1 puis déterminer l’ensemble des points M’ lorsque M décrit le cercle trigonométrique de centre I.
4. On prend z=$e^{iθ}$ ou θ est un réel de l’intervalle ]0,2π[

a/ Montrer que z’=$\frac{1}{2sin\left(\frac{θ}{2}\right)}e^{i\frac{θ}{2}}$ b/ Déterminer 0 pour que |z’|=1.

**Exercice n°6 :**

a/ Montrer que 3-i est une racine carrée de 8-6i

b/ Résoudre dans C l’équation (Ei) :z² -(5+3i)z+2+9i=0

c/ En déduire les solutions de l’équation (E2) :z²-(5-3i)z+2-9i=0

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$. On donne les points A ; B et C d’affixes respectives a=-i ; b=1+2i et c=4+$i$.

a/ Placer les points A ; B et C b/ Ecrire la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{c-b}{a-b}$

c/ En déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

3)Soit l’équation (E3) : iz3-(2+5i)z3+(4+5i)z+2-9i=0

a/ Montrer que l’équation (E3) admet une solution imaginaire que l’on précisera.

 b/ Résoudre dans C l’équation (E3)

**Exercice n°7 :**

 Soit θ un réel de l’intervalle $\left]-\frac{π}{2} ; \frac{π}{2}\right[$ et (Eθ) l’équation : z2-2(i+cosθ) z+1+2ie-iθ =0

1. a/ Vérifier que zi=e-iθ est une solution de (Eθ).

b/ Déterminer alors l’autre solution z2 de (Eθ)

1. Soit A, B et C les points d’affixes respectives : a=i ; b=e-iθ et c=2i+eiθ.

a/ Vérifier que C-a et b-a sont conjugués

b/ Ecrire sous forme exponentielle : c-a

c/ En déduire la valeur de θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

**Exercice n°8 :**

1. Résoudre dans C l’équation : z²-2z+1+$e^{2iθ}$=0C avec θ∈$\left]-\frac{π}{2} ; \frac{π}{2}\right[$
2. Soit l’équation (E) : z3-4z²+(5+e2iθ)e-2(1+e2iθ)=0

a/ Vérifier que 2 est une solution de (E) b/ Résoudre dans C l’équation (E)

1. Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i} ; \vec{j}\right)$ ; on donne les points M1 ; M2 et M3 d’affixes respectives z1=1-ieiθ ; z2=1+ieiθ et z3=2

a/ Montrer que z1=2sin $\left(\frac{θ}{2}+\frac{π}{4}\right)e^{i\left(\frac{θ}{2}-\frac{π}{4}\right)}$ et z2=2cos $\left(\frac{θ}{2}+\frac{π}{4}\right)e^{i\left(\frac{θ}{2}+\frac{π}{4}\right)}$

b/ Montrer que OM1M3M2 est un rectangle c/ Déterminer θ pour que OM1M2M3 soit un carré.

**Exercice n°9 :**

 On considère dans C l’équation (E) : iz²+2sin θz-2i(1+cosθ)=0 où θ∈]-π ;π[

1. Vérifier que sin² θ-2(1+cosθ)-[i(1+cos θ)]². Résoudre alors l’équation (E)
2. Dans le plan complexe P qui est muni d’un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$. On considère les points M et M’ d’affixes respectives z’=-(1+e-iθ) : z’’=1+eiθ.

a/ Ecrire z1 et z2 sous forme exponentielle. En déduire que $\frac{z}{z'}=e^{i(π-θ)}$

b/ En déduire que le triangle OM’M’ est isocèle.

c/ Déterminer les valeurs θ pour lesquelles le triangle OM’M’ soit équilatéral.

**Exercice n°10 :**

 Soit dans C l’équation (E )=z²-(1-i)eiαz-iei2α=0 où α∈[0,π].

1. Résoudre dans C l’équation (E)
2. Le plan complexe P est muni d’un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$. On considère les points A ; M et M d’affixes respectives 1-i, eiα et -ieiα. Déterminer α pour que les points A ; M et M’ soient alignés.

**Exercice n°11 :**

 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u} ; \vec{v}\right)$.

A tout point M(Z±-i), on associe le point M’(Z’) tel que : Z’=$\frac{Z+2i}{1-iZ}$ et soient les points B et C d’affixes respectives (-i) et (-2i)

1. a/ Vérifier que pour tout Z±-i on a : -iZ’=$\frac{Z+2i}{Z+i}$

 b/ En déduire l’ensemble des points M(Z) tels que Z’ soit réel.

1. a/ Montrer que |Z’|= $\frac{CM}{BM}$

b/ En déduire l’ensemble des points M(Z) lorsque M’ varie sur le cercle trigonométrique

1. Soit W=$\frac{Z^{'}-i}{Z-i}$ avec Z±i et Z±-i.

a/ Vérifier que pour tout nombre complexe Z : (Z-i)(1-iZ)=-i(Z²+1).

b/ En déduire que W=$\frac{-1}{Z²+1}$

1. On pose Z= eiθ ; θ∈$\left]0,\frac{π}{2}\right[$

a/ Vérifier que W=$\frac{-e^{-iθ}}{e^{iθ}+e^{-iθ}}$

b/ En déduire en fonction de θ le module et un argument de W.