Exercice n°1 :

Dans un plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$. A tout point M du plan d'affixe z (z≠ $i\sqrt{3}$) on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{z-i}{z-i\sqrt{3}}$.

1) Dans cette question, on prend z=1
a. Donner la forme algébrique de z'
b. Donner la fore trigonométrique de z'. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$
2) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que : |z'|=1.
3) On suppose que z≠i et z≠ $i\sqrt{3}$
a. Montrer que $\left(\overline{u;OM'}\right) = \left(\overline{BM;AM}\right) = [2\pi]$
b. En déduire l'ensemble F des points M du plan P tels que z' soit un réel strictement négatif.

Exercice n°2 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\,;\,\vec{v})$ on donne les points A(-i) et B(i). Soit f l'application : P\{A}→ P ; M(z)→M'(z') tel que z'=$\frac{z-i}{z+i}$

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' est réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que |z'|=1.
3) a/ Vérifier que (z'-1)(z+i)=-2i

   b/ Montrer que si M∈$\zeta_{(A,i)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on caractérisera.
4) On pose z=$e^{i\theta}$ avec θ∈$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

   a/ Vérifier que $e^{i\theta}$ -i=2i $\sin\left(\frac{0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et que $e^{i\theta}$+i=2cos $\left(\frac{0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Exercice n°3 :

Dans un plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère les points M' et M' d'affixes respectives z'=1+ i$e^{i\theta}$ et z''=1- $e^{i\theta}$ avec -$\frac{\pi}{2}$<0<$\frac{\pi}{2}$

1) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.
2) Calculer $\frac{z''}{z'}$ en déduire que OM'M'' est un triangle rectangle.
3) Déterminer 0 pour que OM'M'' soit isocèle.

Exercice n°4 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{i\theta}$ *et* $z_2=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{i\theta}$

a/ Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent à bun même cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

b/ Montrer que $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

c/ En déduire que OM_1M_2 est un triangle équilatéral.

Exercice n°5 :

Dans le plan complexe P rapporte à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ on considère les points I et A d'affixes respective 1 et i. soit z un nombre complexe différent de 1, on désigne par M le point d'affixe z et par M' le point d'affixe $z'=\frac{iz}{z-1}$

1) Déterminer les points M pour lesquels z'=z
2) Déterminer l'ensemble (ι) des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires
3) Montrer que AM'x IM=1 puis déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle trigonométrique de centre I.
4) On prend $z=e^{i\theta}$ ou θ est un réel de l'intervalle]0,2π[

a/ Montrer que $z'=\frac{1}{2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\frac{\theta}{2}}$ b/ Déterminer 0 pour que |z'|=1.

Exercice n°6 :

a/ Montrer que 3-i est une racine carrée de 8-6i

b/ Résoudre dans C l'équation (E_i) :$z^2-(5+3i)z+2+9i=0$

c/ En déduire les solutions de l'équation (E_2) :$z^2-(5-3i)z+2-9i=0$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On donne les points A ; B et C d'affixes respectives a=-i ; b=1+2i et c=4+i.

a/ Placer les points A ; B et C b/ Ecrire la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{c-b}{a-b}$

c/ En déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

3)Soit l'équation (E_3) : $iz^3-(2+5i)z^3+(4+5i)z+2-9i=0$

a/ Montrer que l'équation (E_3) admet une solution imaginaire que l'on précisera.

b/ Résoudre dans C l'équation (E_3)

Exercice n°7 :

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et (E_θ) l'équation : $z^2-2(i+\cos\theta)\,z+1+2ie^{-i\theta}$ =0

1) a/ Vérifier que $z_i=e^{-i\theta}$ est une solution de (E_θ).
   b/ Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E_θ)
2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $a=i$; $b=e^{-i\theta}$ et $c=2i+e^{i\theta}$.
   a/ Vérifier que C-a et b-a sont conjugués
   b/ Ecrire sous forme exponentielle : c-a
   c/ En déduire la valeur de θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice n°8 :

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-2z+1+e^{2i\theta}$=0C avec $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$
2) Soit l'équation (E) : $z^3-4z^2+(5+e^{2i\theta})e-2(1+e^{2i\theta})=0$
   a/ Vérifier que 2 est une solution de (E) b/ Résoudre dans C l'équation (E)
3) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$; on donne les points M_1 ; M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1=1-ie^{i\theta}$; $z_2=1+ie^{i\theta}$ et $z_3=2$
   a/ Montrer que $z_1=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $z_2=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$
   b/ Montrer que $OM_1M_3M_2$ est un rectangle c/ Déterminer θ pour que $OM_1M_2M_3$ soit un carré.

Exercice n°9 :

On considère dans C l'équation (E) : $iz^2+2\sin\theta z-2i(1+\cos\theta)=0$ où $\theta\in]-\pi\ ;\pi[$

1) Vérifier que $\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)-[i(1+\cos\theta)]^2$. Résoudre alors l'équation (E)
2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z'=-(1+e^{-i\theta)}$: $z''=1+e^{i\theta}$.
   a/ Ecrire z^1 et z^2 sous forme exponentielle. En déduire que $\frac{z}{z\prime}=e^{i(\pi-\theta)}$
   b/ En déduire que le triangle OM'M' est isocèle.
   c/ Déterminer les valeurs θ pour lesquelles le triangle OM'M' soit équilatéral.

Exercice n°10 :

Soit dans C l'équation (E)=$z^2-(1-i)e^{i\alpha}z-ie^{i2\alpha}=0$ où $\alpha\in[0,\pi]$.

1) Résoudre dans C l'équation (E)

2) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On considère les points A ; M et M d'affixes respectives 1-i, $e^{i\alpha}$ et $-ie^{i\alpha}$. Déterminer α pour que les points A ; M et M' soient alignés.

<u>Exercice n°11 :</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

A tout point M(Z±-i), on associe le point M'(Z') tel que : $Z'=\frac{Z+2i}{1-iZ}$ et soient les points B et C d'affixes respectives (-i) et (-2i)

1) a/ Vérifier que pour tout Z±-i on a : $-iZ'=\frac{Z+2i}{Z+i}$

   b/ En déduire l'ensemble des points M(Z) tels que Z' soit réel.

2) a/ Montrer que $|Z'|=\frac{CM}{BM}$

   b/ En déduire l'ensemble des points M(Z) lorsque M' varie sur le cercle trigonométrique

3) Soit $W=\frac{Z'-i}{Z-i}$ avec Z±i et Z±-i.

   a/ Vérifier que pour tout nombre complexe Z : $(Z-i)(1-iZ)=-i(Z^2+1)$.

   b/ En déduire que $W=\frac{-1}{Z^2+1}$

4) On pose $Z=e^{i\theta}$; $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

   a/ Vérifier que $W=\frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

   b/ En déduire en fonction de θ le module et un argument de W.