Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) a) Vérifier que pour tout $x>-2$, on a $f'(x)=\dfrac{-(x+3)e^{-x}}{(x+2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la T tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

2) Tracer la droite T et la courbe (C) dans un repère orthonormé .

3)a) Vérifier que pour tout $x>-2$, on a $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}\left(2-x+\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

b) En déduire que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^1(2-x)e^{-x}dx+\frac{1}{4}\int_0^1 x^2f(x)dx$

4) a) Calculer l'intégrale $I=\int_0^1(2-x)e^{-x}dx$.

b) Montrer que $\forall x\in[0,1]$, $\dfrac{x^2}{3e}\le x^2f(x)\le\dfrac{x^2}{2}$ et en déduire $\dfrac{1}{9e}\le\int_0^1 x^2f(x)dx\le\dfrac{1}{6}$

5) On désigne par A l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les axes du repères et la droite d'équation : $x=1$. Montrer que $0.26<A<0.30$

Exercice 2 :

I. Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$

1) Montrer que $\forall\ t>-1$, $g'(t)=-\dfrac{t}{(1+t)^2}$ et dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire le signe de $g(t)$.

II. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$ et Cf sa courbe dans R.O $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1)a) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$

b) Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. Interpréter graphiquement les résultats.

2)a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $\forall x\in IR$, $f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln\left(1+e^{x}\right)\right)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Cf et $\left(O,\vec{j}\right)$ puis tracer Cf.

3) Soit λ un réel strictement positive.

a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-f'(x)$

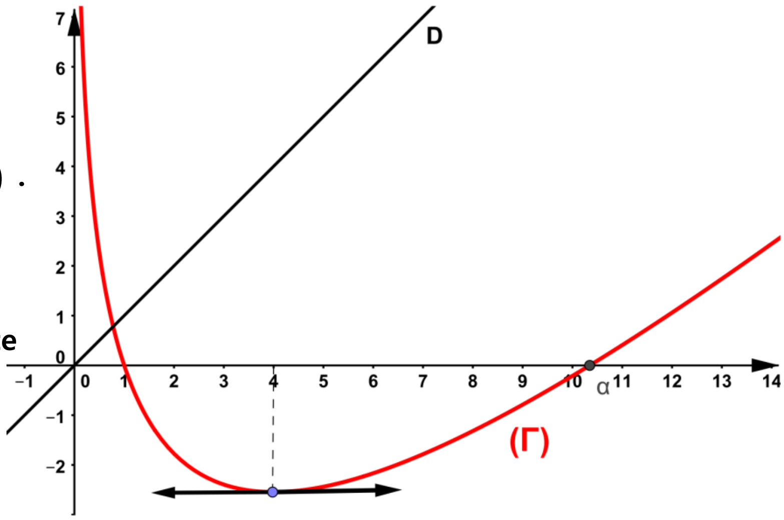
b) Calculer (en u.a) $A(\lambda)$ l'aire limitée par la courbe Cf et les droites : $y=0$, $x=0$ et $x=\lambda$

c) Déduire (en u.a) l'aire du domaine engendré par Cf et les axes du repère $(x>0)$.

Exercice 3 :

On a tracé ci-contre (Γ) la courbe de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=x-1-4\ln x$. On donne :

- L'axe des ordonnées est asymptote à (Γ).
- La droite $D : y=x$ est une direction asymptotique à (Γ) au voisinage de $+\infty$.
- La courbe (Γ) admet une unique tangente horizontale au point d'abscisse 4.
- La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses 1 et α.



A) Déterminer graphiquement

1/ $u(1)$, $u(\alpha)$, $u'(4)$, $\lim\limits_{x\to0^+} u(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{x}$.

2/ Les signes respectifs de $u(x)$ et $u'(x)$.

B) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x^4}-(x-1)+4\ln x$.

1/a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=e^{u(x)}-u(x)$.

b) Calculer $f(\alpha)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

d) Donner les branches infinies de la courbe (Cf).

2/a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=u'(x).\left(e^{u(x)}-1\right)$.

b) Justifier que $f'(x)>0$, si et seulement si, $x\in]1,4[\cup]\alpha,+\infty[$

c) dresser le tableau de variation de f.

3/a) Montrer que pour tout réel x, $e^x-2x>0$.

b) Déduire la position relative de Cf et (Γ) .

c) Tracer dans le même repère la courbe Cf.

4/On désigne par :

A : L'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf et les droites d'équations $x=3$, $x=5$ et $y=0$.

A' : L'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x=3$, $x=5$ et $y=0$.

a) Montrer que $A'=20\ln5-12\ln3-14$

b) Montrer que $A'<A<2f(4)$

c) En déduire que $5<A<5.25$