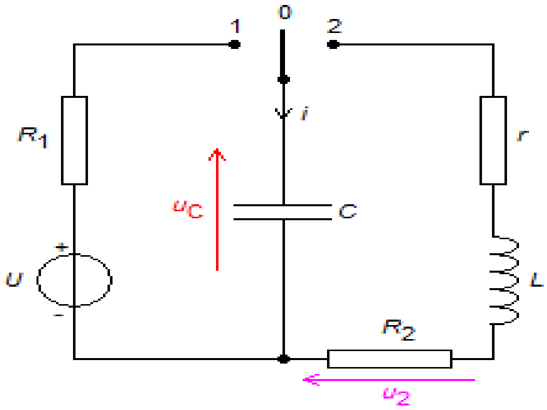
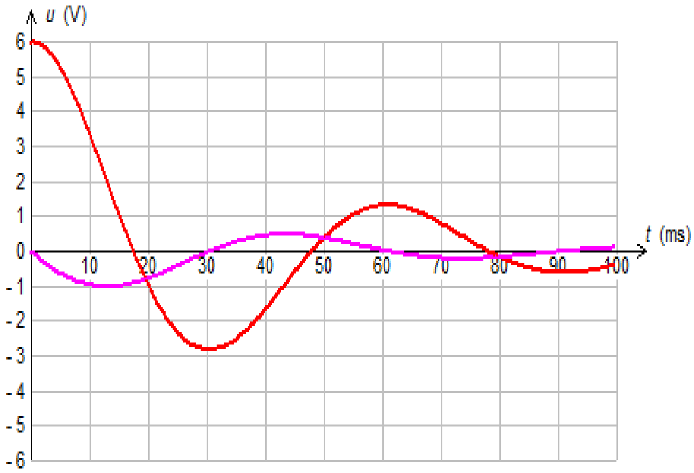
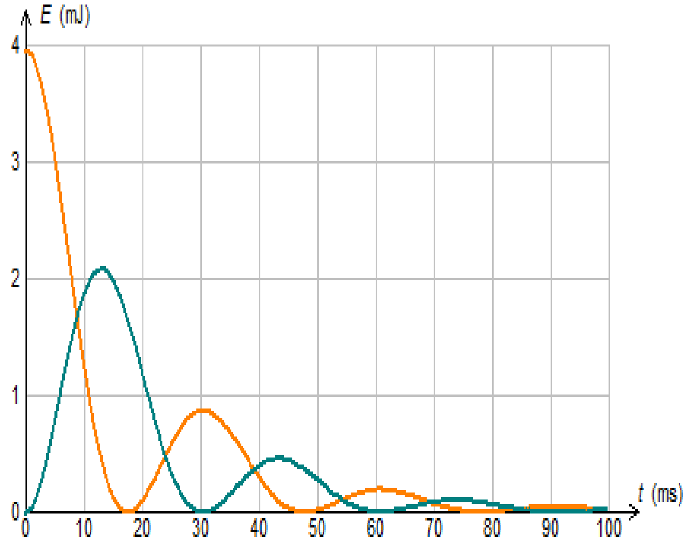


CIRCUIT RLC

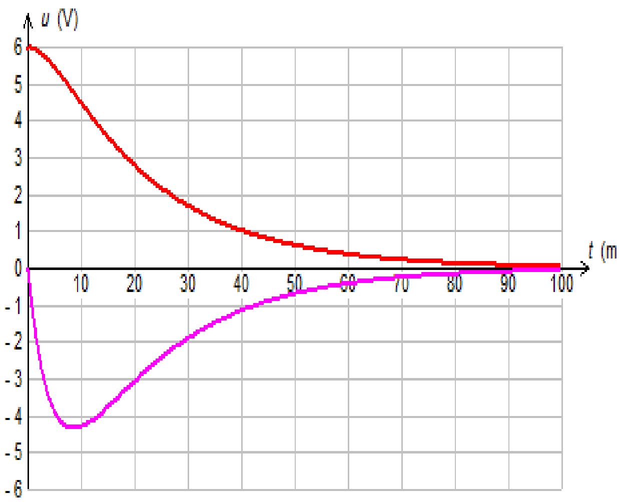
U=6V ; L=0,4 H ; C= 220 µF
R_1=33Ω ;   r =10 Ω
On a R_2 réglable

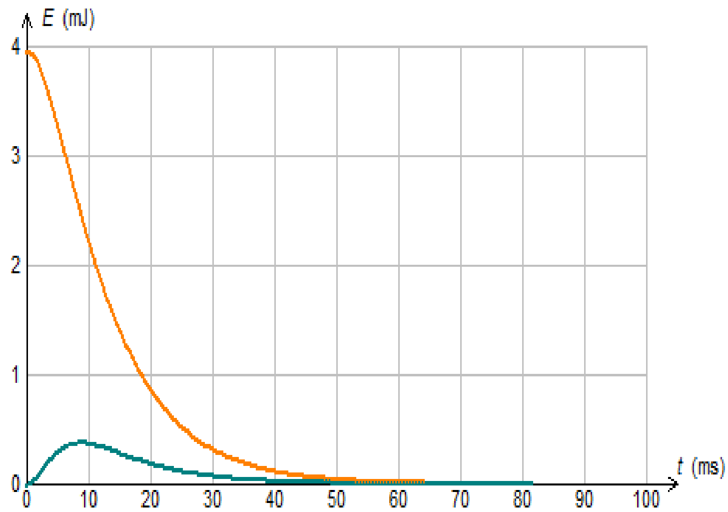
Pour R_2=10 Ω :





Le régime est ……………………………………………………………….
Pour R_2=100 Ω





Le régime est ……………………………………………….

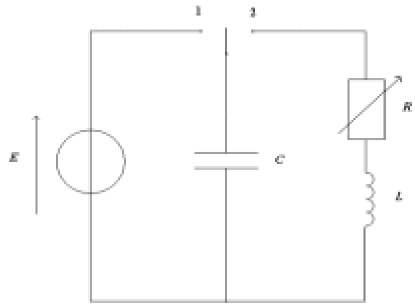
Oscillations libres dans un circuit RLC

I. Exemple d'application d'un circuit LC.

Application des oscillations électriques

Dans cette partie, on étudie une application des oscillations électriques dans le domaine de la météorologie. Pour mesurer le taux d'humidité relative de l'air (noté % d'HR), on peut employer un capteur appelé "humidistance" dont le principe simplifié utilise un condensateur de capacité variant avec l'humidité.

Pour mesurer la valeur de la capacité du condensateur, on peut le placer dans le circuit ci-dessous dans lequel la bobine d'inductance L a une résistance négligeable.



L'interrupteur est d'abord placé en position 1 pour charger le condensateur, puis basculé en position 2 pour le décharger. Un système informatisé d'acquisition de données permet de relever la tension aux bornes du condensateur au cours de la décharge.

Question discussion réponse :

1. Quelle est la nature de l'énergie emmagasinée par un condensateur ?
2. Quelle est la nature de l'énergie emmagasinée par une bobine ?
3. Sous quelle(s) forme(s) l'énergie libérée par le condensateur lors de sa décharge dans le circuit (position 2) va t-elle se transformer ?

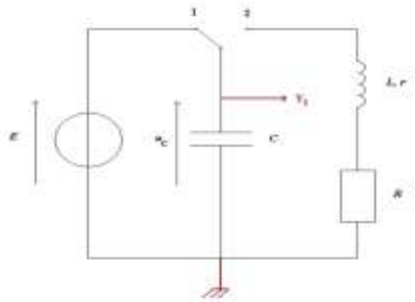
Réponse :

1. L'énergie emmagasinée par un condensateur est électrique.
2. L'énergie emmagasinée par une bobine est magnétique.
3. L'énergie électrique est transformer en énergie magnétique dans la bobine et en énergie thermique dans la résistance.

Nous allons étudier dans ce chapitre, l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur quand il se décharge dans une bobine.

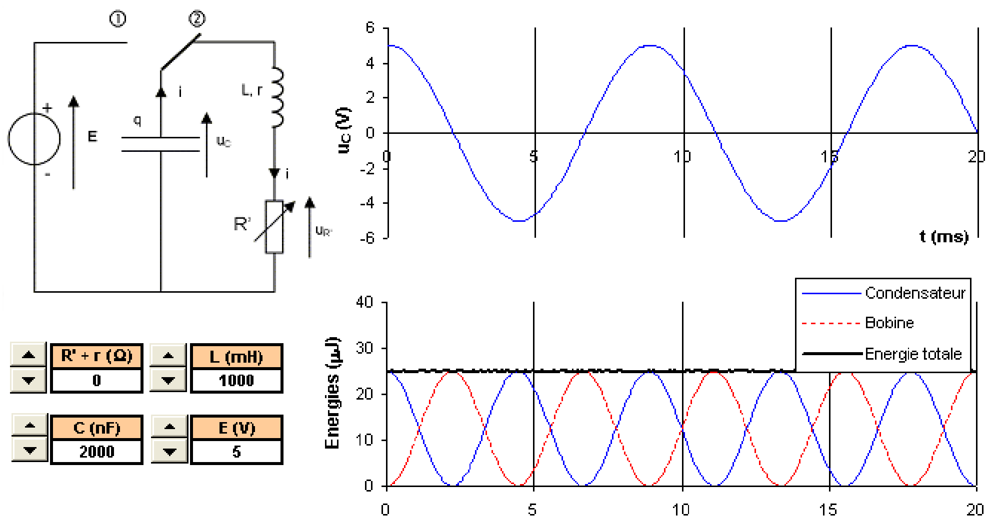
II. Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine.

1. Dispositif expérimental.



2. Visualisation sur un simulateur de la tension aux bornes du condensateur.

Le simulateur utilisé est sur le site :

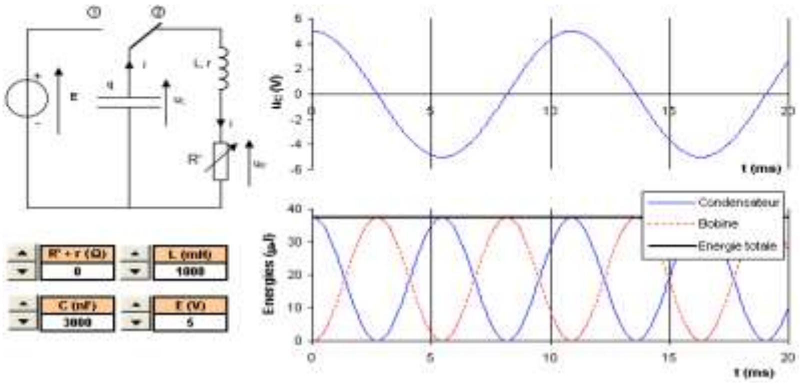


Question discussion réponse :

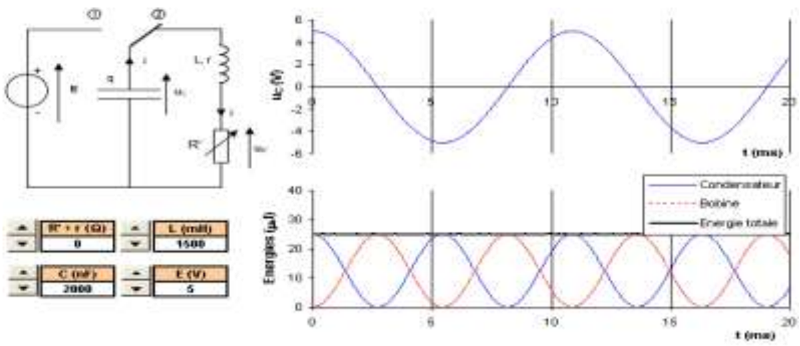
1. Que se passe-t-il quand l'interrupteur est en position 1 ?
2. Que se passe-t-il quand l'interrupteur est en position 2 ?
3. Quelle est la nature de la tension aux bornes du condensateur ?
4. Comment appelle-t-on ce phénomène ?
5. Quelle hypothèse pouvez-vous faire sur les évolutions des énergies dans le condensateur et dans la bobine ?
6. Quelle est l'influence de la valeur de la capacité sur les courbes ?
7. Quelle est l'influence de la valeur de l'inductance sur les courbes ?
8. Quelle est l'influence des résistances sur la tension aux bornes du condensateur et sur les courbes d'énergie ? Pourquoi ?

Réponses :

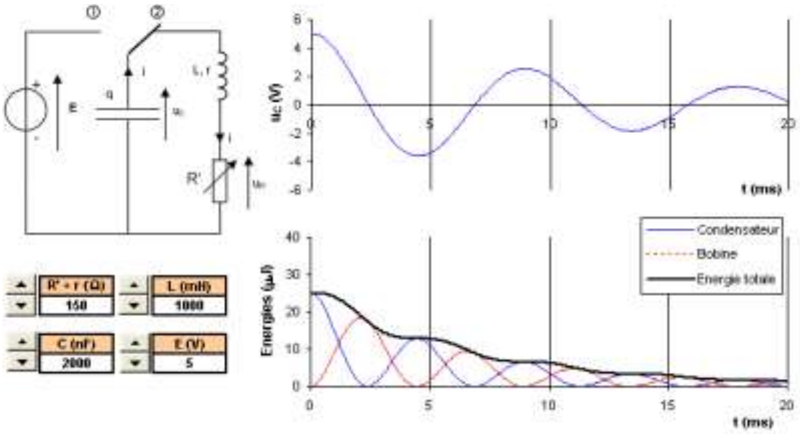
1. Quand l'interrupteur est en position 1, le condensateur se charge.
2. Quand l'interrupteur est en position 2, le condensateur se décharge dans la bobine.
3. La tension aux bornes du condensateur est de nature sinusoïdale.
4. Il s'agit d'oscillations libres. (libres car il n'y a pas d'apport d'énergie après le début de la décharge).
5. On peut proposer comme hypothèse qu'il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.
6. Quand on augmente la valeur de la capacité, l'énergie initiale du condensateur est plus élevée. L'énergie reçue par la bobine l'est alors également. La période des oscillations augmentent également.



7. Quand on augmente la valeur de l'inductance, la période des oscillations augmentent mais n'a pas d'influence sur l'énergie de la bobine car c'est le condensateur qui apporte l'énergie initiale.



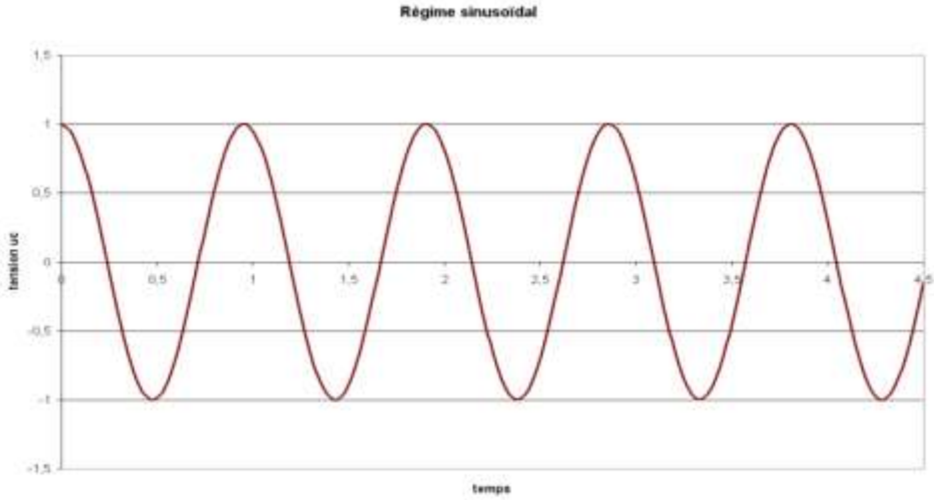
Quand on augmente la valeur des résistances, les oscillations sont amorties. Une partie de cette énergie est transférée sous forme d'énergie thermique (effet Joule).



3. Les tr

Cette p

Régime périodique. (libre non amorti).



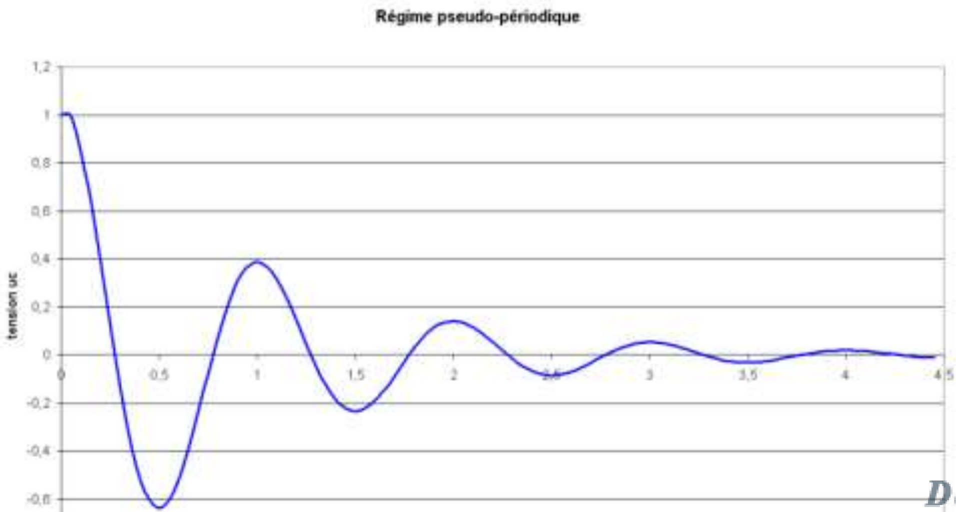
Dans le cas d'un circuit LC, où il n'y a donc pas de résistance, le régime est appelé :

périodique sinusoïdale ou harmonique.

Il n'y a pas d'amortissement.

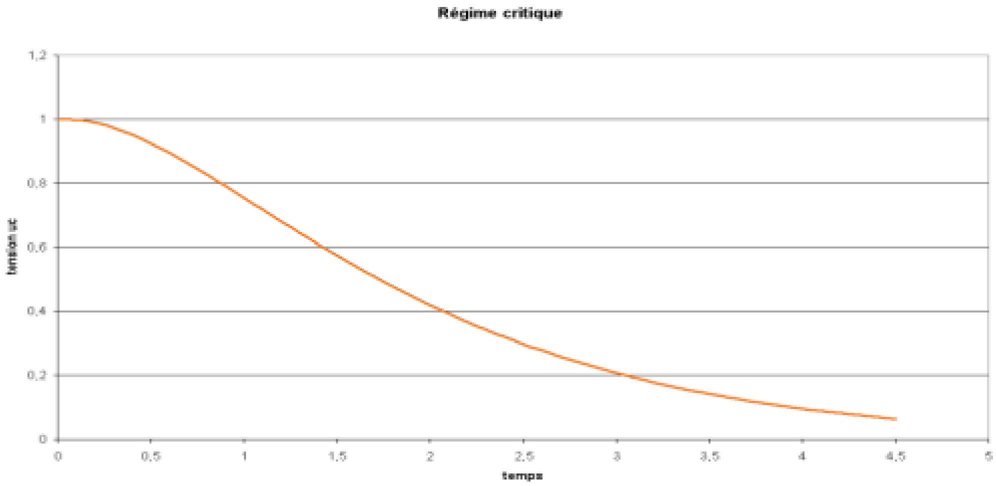
La période propre est T_0.

Régime pseudo-périodique. (libre amorti).



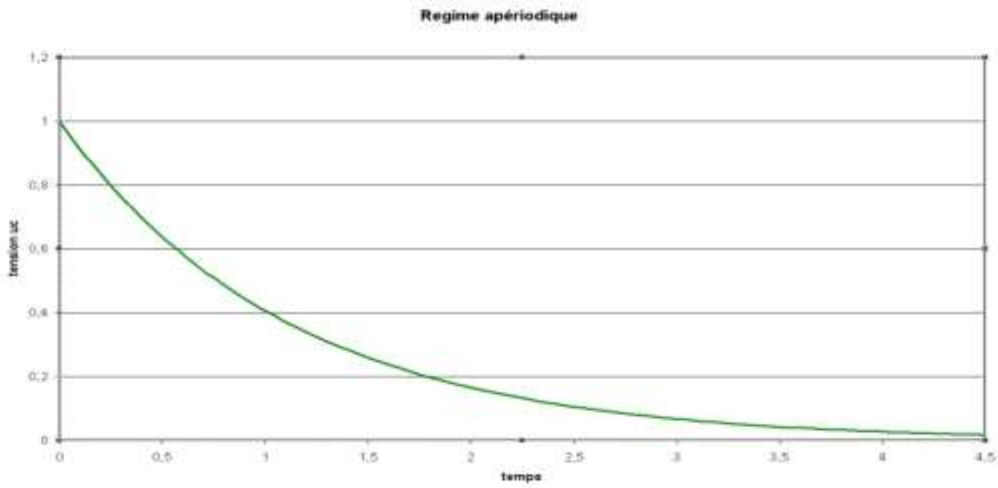
Le régime pseudo-périodique est observé pour des valeurs faible de la résistance totale $R + r$.
La tension oscille toujours autour de zéro, mais son amplitude décroît au cours du temps.
On appelle pseudo-période T la durée qui sépare deux maxima positifs consécutifs.
Pour de faibles amortissements $T = T_0$
Pour des amortissements un peu plus élevés $T \geq T_0$

Régime critique (libre amorti) *Limite externe du programme*



Le régime critique correspond à un amortissement plus important. Ce régime est la limite entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique.

Régime apériodique. (libre amorti).

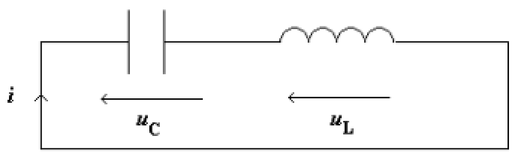


La valeur de $R + r$ est très importante. L'amortissement est très élevé.
On n'observe plus oscillation.

III. Résolution analytique pour la tension aux bornes du condensateur dans le cas d'un amortissement négligeable.

1. Etablissement de l'équation différentielle.

Après avoir chargé le condensateur, on le place dans un circuit comportant une bobine.



La résistance de la bobine est considérée négligeable.

On applique la loi d'additivité des tensions :

$$u_c + u_L = 0$$

$$u_c + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$u_c + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \qquad \text{avec } i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{et } q = Cu_c$$

$$u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

L'équation différentielle pour la tension u_c s'écrit alors : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}\cdot u_c = 0$

Remarque : L'équation différentielle pour la charge q s'écrit $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}\cdot q = 0$

2. Solution de l'équation différentielle pour la tension u_c.

Vérifions que l'équation $u_c = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \phi_0\right)$ est une solution de l'équation différentielle $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}\cdot u_c = 0$

Avec A, T_0 et ϕ_0 étant des grandeurs à déterminer.

T_0 est la période propre du circuit LC. Elle s'exprime en seconde (s)

ϕ_0 est la phase à l'origine. Elle s'exprime en radian (rad)

Dans un premier temps, on dérive deux fois l'expression $u_c = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \phi_0\right)$

Rappel : u_C est une fonction composée

$(\cos u_C)' = -\sin u_C \times u_C'$

$(\sin u_C)' = \cos u_C \times u_C'$

$$\frac{du_c}{dt} = -A\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)$$

$$\frac{du_c^2}{dt^2} = -A\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)$$

Dans un deuxième temps, on reporte u_c et $\frac{d^2u_c}{dt^2}$ dans l'équation différentielle $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}\cdot u_c = 0$

$$-A\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right) + \frac{1}{LC}\cdot A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right) = 0$$

$$A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)\left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right] = 0$$

Dans un troisième temps, on identifie T_0.

Pour ce faire, il faut s'affranchir du temps, c'est à dire éliminer la partie de l'expression qui dépend du temps.

Il suffit que $\left[\frac{1}{LC}-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right]=0$ c'est à dire que $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

L : inductance (H) C : capacité (F)

Dans un quatrième temps, on identifie A et ϕ_0.

On prend en compte les conditions initiales à $t = 0$.

à $t = 0$ $u_c = E$ et $i = 0$

alors $u_c = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}+\phi_0\right)$ en remplaçant $t = 0$ et $u_c = E$

$E = A\cos(0 + \phi_0)$

$E = A\cos\phi_0$

Donc $A = E$ et $\cos\phi_0 = 1$

Soit $A = E$ et $\phi_0 = 0$

La tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u_c = E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

E est l'amplitude (V)

T_0 est la période propre (s)

ϕ_0 est la phase à l'origine (rad)

u_c est la tension aux bornes du condensateur

3. Expression de l'intensité.

Rappel : on peut visualiser l'intensité aux bornes de la résistance et la mesurer à l'aide de la loi d'Ohm.

On a $q = Cu_c$

$$q = CE\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

Avec $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = -\frac{2\pi}{T_0}CE\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

On peut également exprimer l'intensité ainsi :

Sachant que $-\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, on a : $i = \frac{2\pi}{T_0}CE\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\frac{\pi}{2}\right)$

Ce qui permet de mettre en évidence de déphasage de l'intensité et de la tension. (*Limite externe du programme*)

4. Vérification de l'unité de T_0 par analyse dimensionnelle.

On a $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

2π n'a pas de dimension

La dimension de $\sqrt{LC}$ s'écrit $[L]^{\frac{1}{2}} \cdot [C]^{\frac{1}{2}}$

Question discussion réponse :

Montrer que $\sqrt{LC}$ a la dimension d'un temps.

Réponse :

A partir de $u_L = L\dfrac{di}{dt}$, $i = \dfrac{dq}{dt}$ et $q = Cu$

On a $[L] = \dfrac{[U]\cdot[T]}{[I]}$ et $[C] = \dfrac{[Q]}{[U]} = \dfrac{[I]}{[U]} \times [T]$

Alors : $[LC] = \dfrac{[U]\cdot[T]}{[I]} \times \dfrac{[I]\times[T]}{[U]} = [T]^2$

Donc $[L]^{\frac{1}{2}} \cdot [C]^{\frac{1}{2}} = [T]$

La période propre dont l'expression est $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ a bien la dimension d'un temps et s'exprime en seconde.

IV. Etude énergétique.

Cette partie est également vue en TP

1. Cas d'un circuit LC.

Dans un circuit LC, l'énergie totale du circuit est constante au cours du temps.

Avec $E_C = \frac{1}{2}Cu^2$ et $E_L = \frac{1}{2}Li^2$

$E_{Totale} = E_C + E_L$ = constante

Il y a échange énergétique entre le condensateur et la bobine.

Expression de l'énergie totale :

- en fonction de la tension maximale aux bornes du condensateur $u = E$, on a $E_{Totale} = \frac{1}{2}CE^2$
- en fonction de l'intensité maximale parcourant le circuit $i = I_{max}$, on a $E_{Totale} = \frac{1}{2}LI^2_{max}$

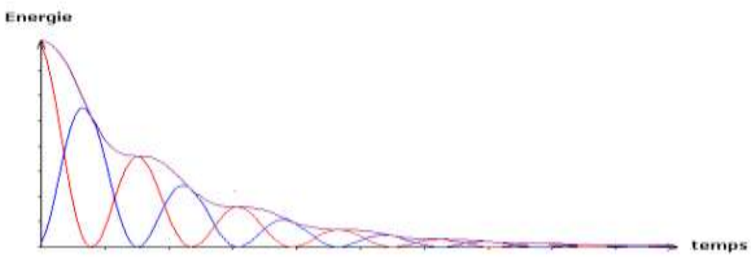
2. Cas d'un circuit RLC.

Dans un circuit RLC, il y a toujours échange énergétique entre le condensateur et la bobine mais il y a déperdition d'énergie par effet Joule (transfert thermique) dans les résistances.

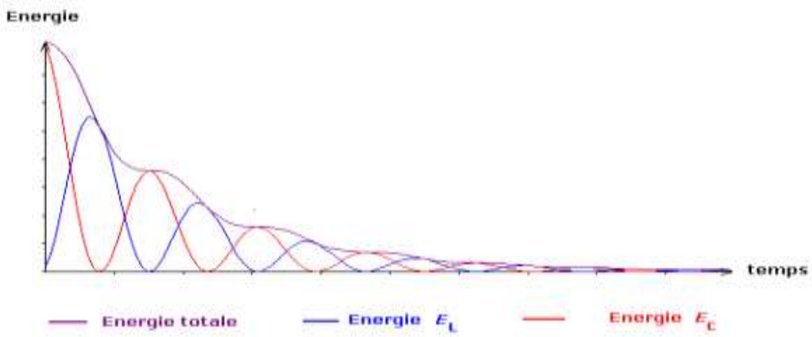
Il y a donc amortissements des oscillations.

Question discussion réponse :

Identifier les différentes courbes du graphe ci-dessous :



Réponse :



A t = 0, la courbe rouge et à son maximum. Il s'agit donc de l'énergie emmagasinée par le condensateur dont la tension est maximale à cette date.

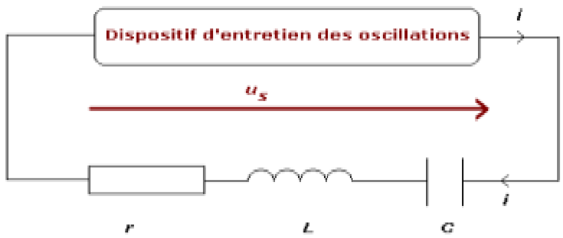
A t = 0, la courbe bleu est à son premier minimum. La bobine n'a pas encore reçue l'énergie du condensateur.

La courbe violette correspond à la somme des deux autres courbes, donc à l'énergie totale.

3. Entretien des oscillations.

3.1. Nécessité d'une source d'énergie pour compenser l'énergie évacuée par transfert thermique.

Dans le cas du circuit RLC, la puissance perdue par effet Joule $P = Ri^2$ doit être compenser par un dispositif d'entretien externe.



3.2. Comment obtenir une tension sinusoïdale de période choisie ?
Question discussion réponse :
On souhaite réaliser un circuit permettant d'obtenir une tension sinusoïdale de fréquence f = 100 Hz aux bornes du condensateur.
On dispose d'une bobine d'inductance L = 100 mH et de résistance r = 10 Ω et d'un vaste choix de condensateurs.
Proposer un schéma du dispositif permettant d'aboutir au résultat escompté.
Réponse :
Dans un premier temps, il faut choisir un condensateur permettant d'obtenir des oscillations de fréquence 100 Hz soit une période propre T_0 = 0,10 s.
Pour cela, on utilise la relation $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

On obtient $C = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 L} = \dfrac{0{,}10^2}{4\pi^2 \times 0{,}1} = 2{,}53 \times 10^3$ F = 2,53 mF

Dans un deuxième temps, il faut introduire dans le circuit un dispositif d'entretien des oscillations.
On obtient le circuit suivant :