Année

2020 – 2021

Dipôle RL

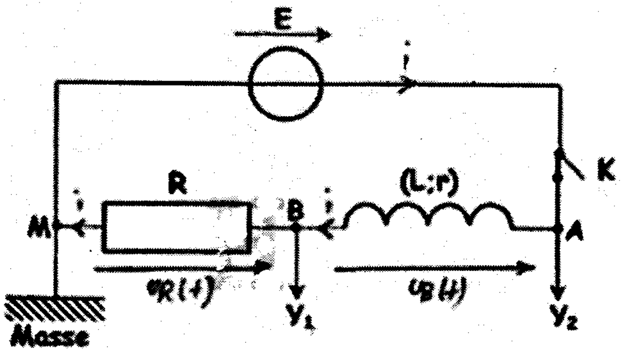
Prof

4ème TEC et SC EXP-Math

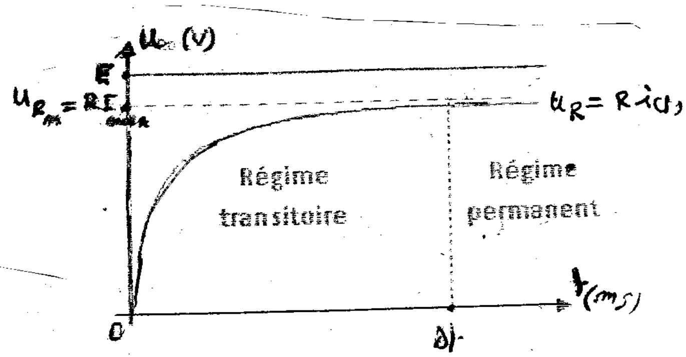
Yedes Rached

1°) Etude expérimentale de l'établissement du courant :

On réalise le montage de la figure ci-dessous et on ferme l'interrupteur K :



- La bobine s'oppose à l'établissement du courant.



Δt : la durée de l'établissement du courant Δt ≃ 5τ

2°) Etude théorique de l'établissement du courant :

a) Tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor :

- **Equation différentielle en i :**

La loi des mailles s'écrit :

$u_R(t) + u_B(t) - E = 0 \Rightarrow u_R(t) + u_B(t) = E$

$\Rightarrow Ri + ri + L\frac{di}{dt} = E \Rightarrow (R+r)\,i + L\frac{di}{dt} = E$

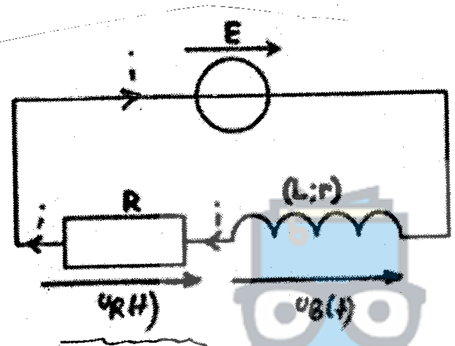
$\Rightarrow \frac{R+r}{L}\,i + \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$ (1)

posons $\tau = \frac{L}{R+r}$: constante de temps

(1) devient : $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}\,i = \frac{E}{L}}$

b) Détermination de I_0 : (I_{max})

La loi des mailles s'écrit :



$u_R(t) + u_B(t) - E = 0 \Rightarrow u_R(t) + u_B(t) = E$

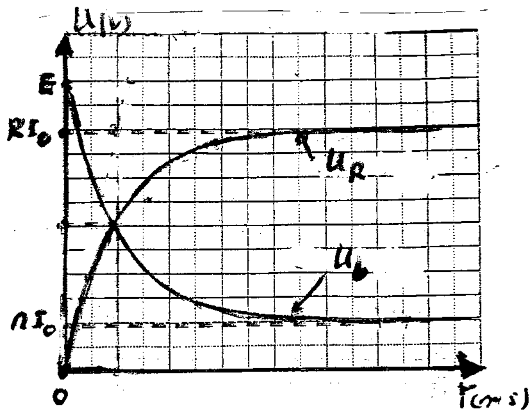
$\Rightarrow Ri + ri + L\frac{di}{dt} = E \Rightarrow (R+r)\,i + L\frac{di}{dt} = E$

En R.P., on a : $i = I_0 = cste$ et $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow (R+r)I_0 = E \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{E}{R+r}}$

* *Remarque*

$$\begin{cases} u_R(t) = R\,i(t) \\ \text{En RP, } i = I_0 \Rightarrow \boxed{u_R(t) = R I_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_b(t) = r\,i + L\dfrac{di}{dt} \\ \text{En RP ; } i = I_0 = cte \text{ et } \dfrac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{u_b = r I_0} \end{cases}$$

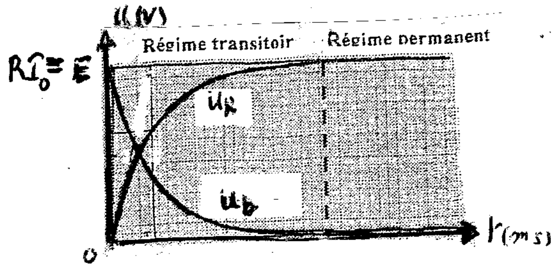


loi de maille

$$u_R + u_b - E = 0$$

$$t = 0_s \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow u_b - E = 0 \Rightarrow \boxed{u_b = E}$$

Cas d'une bobine purement inductive (r=0)



$$\bullet\ R I_0 = R\frac{E}{R+r} = \cancel{R}\frac{E}{\cancel{R}} = E \qquad (r = 0)$$

- *Expression de $i(t)$:*
  - La solution de l'éq. (*) est de la forme : $i(t) = Ae^{-\alpha t} + B$.

    où A , B et α sont des constantes à déterminer .

$$* \ t = 0_s \Rightarrow \begin{cases} i = Ae^{0} + B = A + B \\ i = 0 \end{cases} \Rightarrow A + B = 0 \qquad A = -B$$

$$i = Ae^{-\alpha t} + B \quad (1)$$

$$\frac{di}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t} \quad (2)$$

on remplace (1) et (2) dans l'équation diff.

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{L} \Rightarrow -\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{1}{\tau}\left(Ae^{-\alpha t} + B\right) = \frac{E}{L}$$

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{A}{\tau}e^{-\alpha t} + \frac{B}{\tau} = \frac{E}{L}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\tau} - \alpha\right) A e^{-\alpha t}}_{\text{variable}} + \underbrace{\frac{B}{\tau}}_{cte} = \underbrace{\frac{E}{L}}_{cte}$$

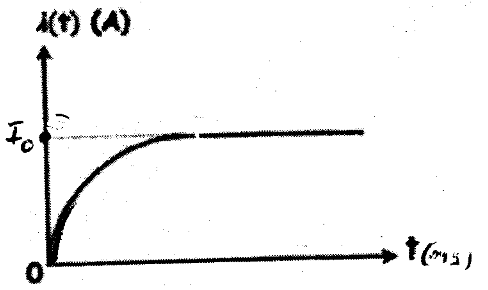
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{\tau} - \alpha\right) A e^{-\alpha t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tau} - \alpha = 0 \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{\tau}} \\ \frac{B}{\tau} = \frac{E}{L} \Rightarrow B = \frac{E}{L} \times \tau = \frac{E}{L} \times \frac{L}{R+r} = \frac{E}{R+r} = I_0 \end{cases}$$

$\boxed{B = I_0}$ et $A = -B \Rightarrow \boxed{A = -I_0}$

$$i_{(t)} = A e^{-\alpha t} + B \qquad i_{(t)} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0$$

$$\boxed{i_{(t)} = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad **$$

D'où , la courbe représentative de la fonction i(t) est la suivante :



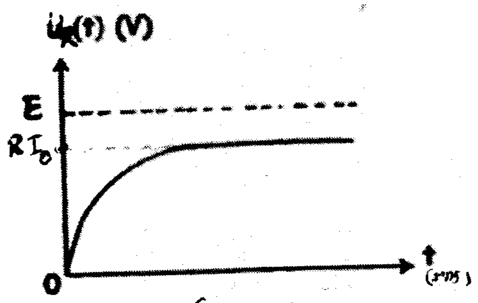
$$\begin{cases} i_{(t=0s)} = I_0(1 - e^0) = 0 \\ i_{(t \to +\infty)} = I_0(1 - e^{-\infty}) = I_0 \end{cases}$$

● Expression de la tension $u_R(t)$:

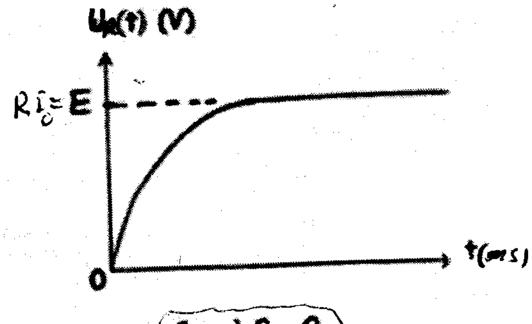
$u_R(t) = R\,i(t) \Rightarrow \boxed{u_R(t) = R I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad **$

$i_{(t)} = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

D'où , la courbe représentative de la fonction $u_R(t)$:



Cas ($r \neq 0$)



Cas où $r = 0$

● Expression de la tension $u_b(t)$:

$$u_b = r i + L\frac{di}{dt} \qquad \begin{cases} i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$$u_b = r I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + L\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_b = r I_0 - r I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \cancel{L}\frac{\frac{E}{R+r}}{\frac{L}{R+r}} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow u_b = r\frac{E}{R+r} - r\frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}} + E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{u_b(t) = \left(1 - \frac{r}{R+r}\right) E e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r}{R+r} E}$$

Autre Methode

$$u_b = E - u_R = E - Ri = E - R I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$u_b = \underbrace{E - RI_0}_{rI_0} + RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$I_0 = \frac{E}{R+r} \Rightarrow I_0(R+r) = E$
$RI_0 + rI_0 = E$
$rI_0 = E - RI_0$

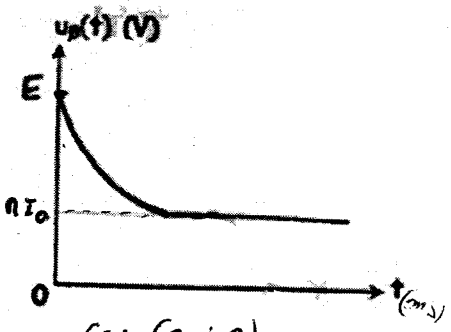
$$u_b(t) = r I_0 + R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{u_b(t) = I_0\left(r + R e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

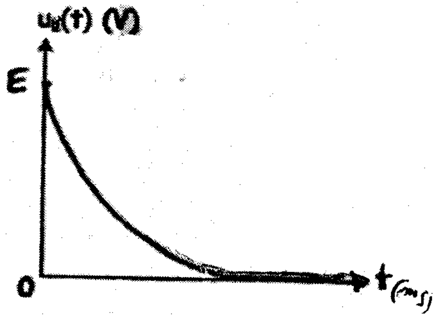
Remarque $\quad I_0 = \frac{E}{R+r}$

$$\begin{cases} u_b(t=0s) = I_0(r+R) = E \\ u_b(t \to +\infty) = I_0(r + R\underbrace{e^{-\infty}}_{0}) = r I_0 \end{cases}$$

D'où , la courbe représentative de la fonction $u_B(t)$ est la suivante :



Cas ($r \neq 0$)



Cas où . $r = 0$

II/ La constante de temps τ d'un dipôle RL :

1°) Analyse dimensionnelle de la constante de temps τ :

D'après la loi d'ohm pour un conducteur ohmique : $U = Ri \Rightarrow R = \frac{U}{i} \Rightarrow [R] = \frac{[U]}{[i]}$ ...

Pour une bobine purement inductive , ... $u = L\frac{di}{dt} \Rightarrow u = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \Rightarrow L = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta i} \Rightarrow [L] = \frac{[U][t]}{[i]}$

D'où , ... $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow [\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \dfrac{\frac{\cancel{[U]}[t]}{\cancel{[i]}}}{\frac{\cancel{[U]}}{\cancel{[i]}}} = [t] \Rightarrow [\tau] = [t]$ ..

. donc τ s'exprime en seconde.

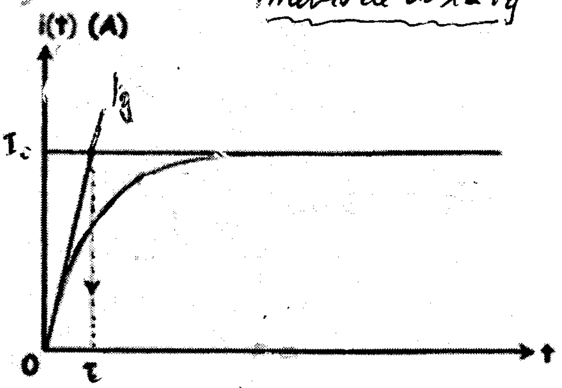
2°) Détermination de la constante de temps τ :

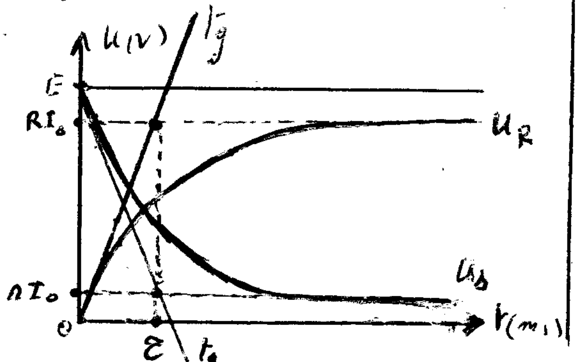
a) Par calcul direct :

Connaissant les valeurs de R_T et de L , on peut calculer directement la valeur de la constante de temps $\boxed{\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{L}{R + r}}$ #

b) Détermination graphique (première méthode) :

méthode de la tg





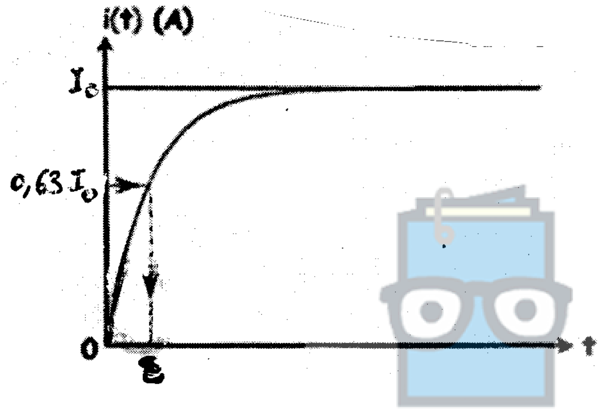
(deuxième méthode) :

$i(t) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

En remplaçant t par τ dans l'expression de i(t) , on obtient :

$$i(\tau) = I_0(\underbrace{1 - e^{-1}}_{0,63}) = 0,63\, I_0$$

$$\boxed{t = \tau \Rightarrow i = 0,63\, I_0}$$



Définition : τ ~~la~~ cste de Temps :

La constante de temps τ est une grandeur caractéristique du dipôle RL, elle renseigne sur le retard avec lequel s'établit le régime permanent

si $\tau \nearrow$ la duree de l'etablissement

Remarque : En l'absence de la diode, il apparaitre aux bornes du dipôle RL une tension élevée qui provoquera au niveau de l'interrupteur une étincelle de rupture.

Donc la diode protège le circuit d'une surtension.

role de la diode