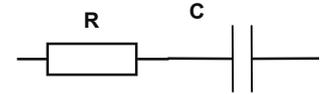


LE DIPÔLE RC

I Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

1 Dipôle RC

Le dipôle RC est constitué d'un condensateur associé en série avec un résistor (conducteur ohmique).



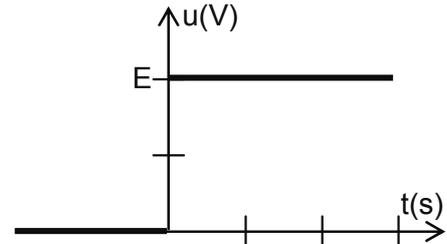
2 Echelon de tension

U est une tension appliquée aux bornes du dipôle RC, à t=0 s on ferme le circuit. Si :

Pour t < 0 ; u = 0

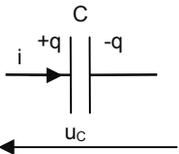
Pour t ≥ 0 ; u = E.

On dit alors qu'on applique un échelon de tension au dipôle RC.



3 Relation entre i(t) et u_c(t)

En courant variable : $i(t) = \frac{dq}{dt}$.



$$i = \frac{dq}{dt} \text{ avec } q = C \cdot u_c \text{ donc } i = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

à retenir

4 Equation différentielle

(on doit représenter les flèches des tensions avant d'établir l'équation différentielle).

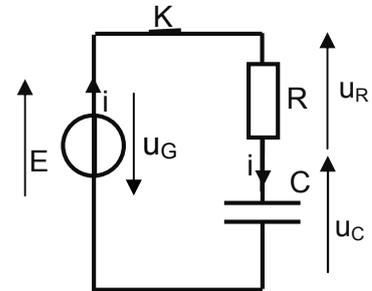
Le condensateur est initialement déchargé, à la date t=0, on ferme l'interrupteur K.

d'après la loi des mailles :

$$u_R + u_c + u_G = 0 \text{ avec } u_R = Ri \text{ et } u_G = -E$$

$$Ri + u_c - E = 0 \text{ or } i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E, \text{ on pose } \tau = RC$$



$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = E \quad \text{ou} \quad \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

5 Solution de l'équation différentielle

a- Solution de l'équation différentielle :

L'équation différentielle précédente a pour solution $u_c = A + Be^{-\alpha t}$.

Avec A ; B et α sont des constantes positives. Déterminons A ; B et α :

1^{ère} étape : Le condensateur est initialement vide $u_c(0) = 0$.

$$A + Be^0 = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \text{ donc } B = -A. \quad \text{D'où } u_c = A - Ae^{-\alpha t}.$$

2^{ème} étape : lorsque $t \rightarrow +\infty$; le condensateur est complètement chargé : $u_c(\infty) = E$.

$$A - Ae^{-\infty} = E \text{ or } e^{-\infty} = 0.$$

$$A - 0 = E \text{ d'où } A = E \text{ et } B = -E.$$

$$\text{Donc } u_c = E - Ee^{-\alpha t}.$$

$$u_c = E(1 - e^{-\alpha t}).$$

3^{ème} étape : Cette solution vérifie l'équation différentielle $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$

Donc : $RCE(0 - (-\alpha)e^{-\alpha t}) + E(1 - e^{-\alpha t}) = E$

$$RCE\alpha e^{-\alpha t} + E - E e^{-\alpha t} = E \Leftrightarrow RCE\alpha e^{-\alpha t} - E e^{-\alpha t} = 0 \Leftrightarrow Ee^{-\alpha t}(RC\alpha - 1) = 0.$$

Or $Ee^{-\alpha t} > 0$ d'où $RC\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow RC\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

$$u_c = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

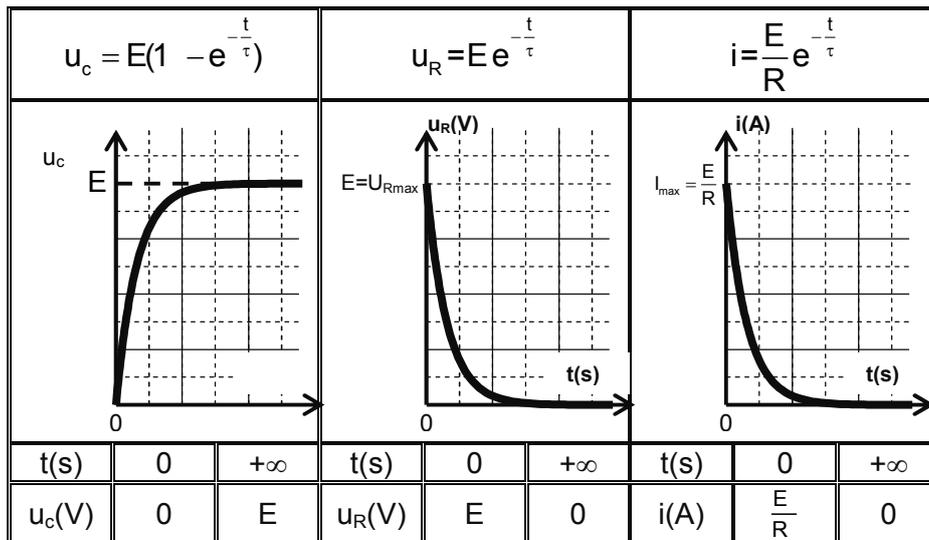
6 Expression de $u_R(t)$ et de $i(t)$

Expression de $u_R(t)$; $u_R = E - u_c = E - E(1 - e^{-t/\tau}) = E - E + Ee^{-t/\tau}$ d'où $u_R = Ee^{-t/\tau}$

Expression de $i(t)$

$$i = \frac{u_R}{R} \text{ donc } i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

7 Graphes de $u_c(t)$, $u_R(t)$ et de $i(t)$



8 La constante de temps τ

a- Définition :

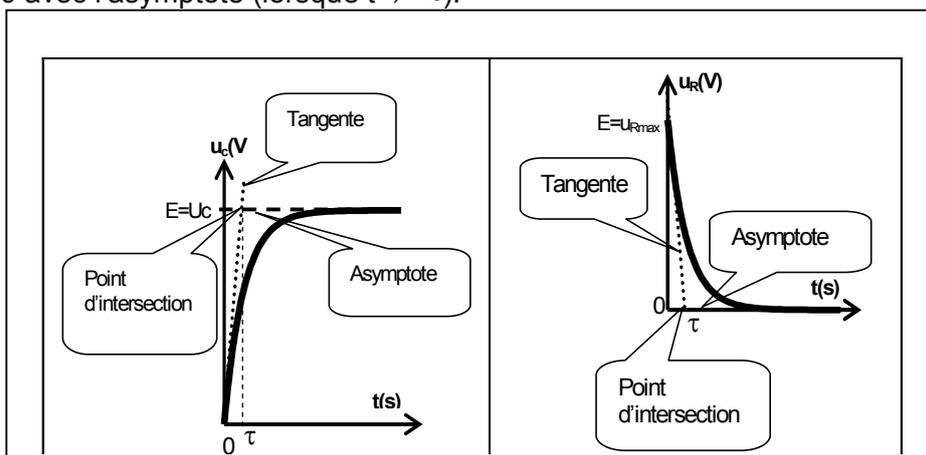
La constante de temps τ est une grandeur caractéristique du dipôle RC, elle nous renseigne sur la rapidité avec laquelle s'effectue la charge ou la décharge d'un condensateur.

b- Unité de τ :

$$\tau = RC \text{ avec } \begin{cases} R = \frac{u_R}{i} \text{ donc } R \text{ est en } \frac{V}{A} \\ C = \frac{q}{u_c} \text{ or } q = It \text{ donc } C \text{ est en } \frac{A \cdot s}{V} \end{cases} \text{ d'où } \tau \text{ est en } \frac{V}{A} \cdot \frac{A \cdot s}{V} = s \text{ (seconde) donc } \tau \text{ est un temps.}$$

c- Détermination de τ :

- **Par calcul** : Ayant les valeurs de R(en Ω) et de C(en F), on peut calculer directement τ (en s) ; $\tau = RC$.
- **Graphiquement** : **1^{ère} méthode (utilisation de la tangente à l'origine)** : on peut montrer que τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de $u_c(t)$ [de même pour $u_R(t)$, $i(t)$ et $q(t)$] à la date $t=0$ avec l'asymptote (lorsque $t \rightarrow +\infty$).



○ **2^{ème} méthode (lecture graphique) :**

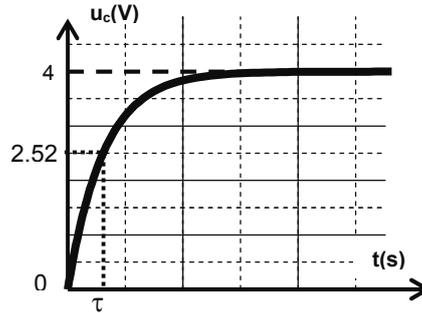
1^{er} cas : à partir du graphe de $u_c(t)$

Pour $t=\tau$, quelle est la valeur de u_c ?

$$u_c(\tau) = E(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,637 E$$

Exemple :

On a $E=4\text{ V}$ d'où $0,637 \times 4 = 2,52\text{ V}$ donc l'abscisse du point d'ordonnée $2,52\text{ V}$ est égale à τ



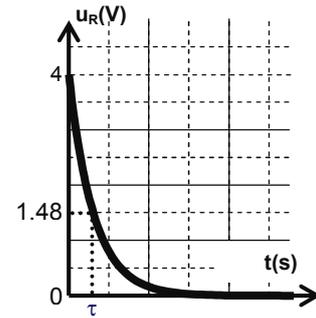
2^{ème} cas : à partir du graphe de $u_R(t)$

Pour $t=\tau$, quelle est la valeur de u_R ?

$$u_R(\tau) = E \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau}} = E \cdot e^{-1} \approx 0,37 E$$

Exemple :

On a $E=4\text{ V}$ d'où $0,37 \times 4 = 1,48\text{ V}$ donc l'abscisse du point d'ordonnée $1,48\text{ V}$ est égale à τ .



lorsque

9 Durée de charge d'un condensateur

On peut considérer qu'un condensateur est complètement chargé sa tension $u_c = 0,99E$ ce qui donne une durée de charge $t \approx 5\tau = 5RC$

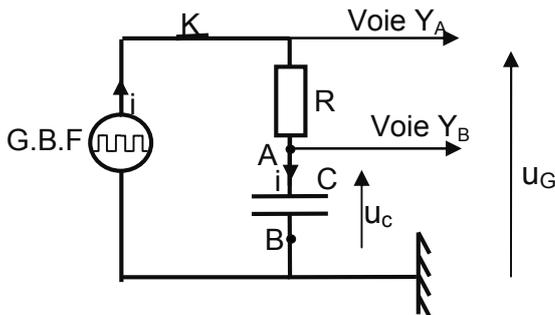
Le temps de charge augmente avec R et avec C .

Pour $t < 5\tau$, on a le régime transitoire.

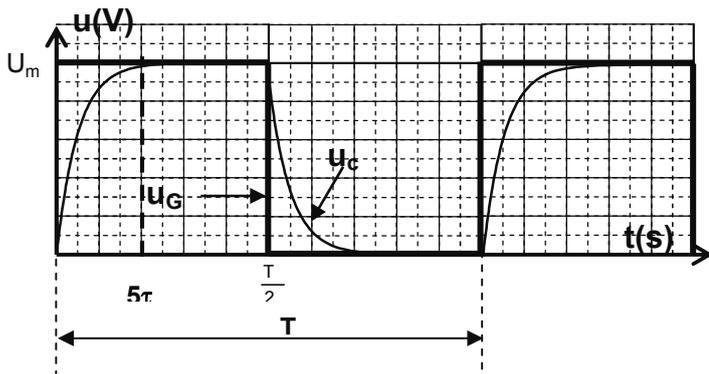
Pour $t \geq 5\tau$, on a le régime permanent.

Remarque :

- la réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension est la charge progressive du condensateur : c'est un phénomène transitoire.
- Charge d'un condensateur par une tension créneaux.

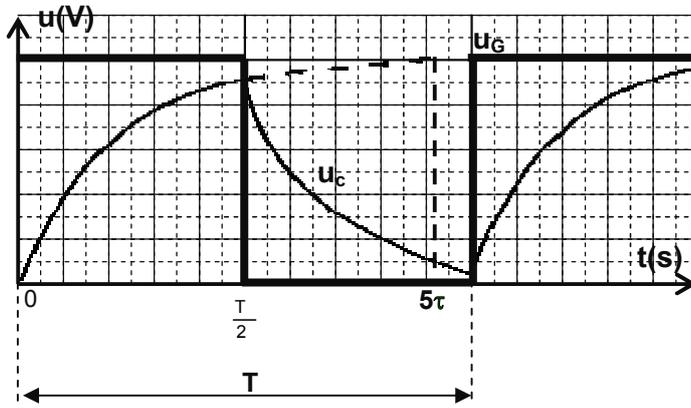


Pour $5\tau < \frac{T}{2}$, pendant une demi-période la tension u_c peut atteindre sa valeur finale donc on observe les courbes suivantes (les deux voies ont la même sensibilité verticale) :



ne peut pas atteindre sa valeur finale donc on observe les courbes suivantes :

Pour $5\tau > \frac{T}{2}$, pendant une demi-période la tension u_c



II La décharge d'un condensateur

1- Equation différentielle :

(on doit garder la même orientation du circuit).

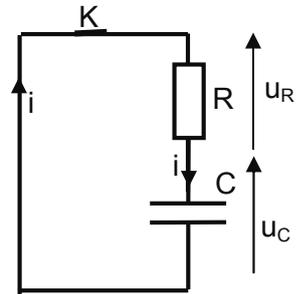
Le condensateur est initialement chargé, à la date $t=0$, on ferme l'interrupteur K. d'après la loi des mailles :

$$u_R + u_c = 0 \text{ avec } u_R = Ri$$

$$Ri + u_c = 0 \text{ avec } i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0, \tau = RC$$

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \text{ ou } \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0$$



2- Solution de l'équation différentielle :

L'équation différentielle précédente a pour solution $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.

Avec $\tau = RC$.

3- Expression de $u_R(t)$ et de $i(t)$:

Expression de $u_R(t)$

$$u_R = 0 - u_c = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} \text{ d'où } u_R = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Expression de $i(t)$: $i = \frac{u_R}{R}$ donc $i = \frac{-E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

4- graphes de $u_c(t)$, $u_R(t)$ et de $i(t)$:

