

I/ Introduction

1-Définition d'un filtre

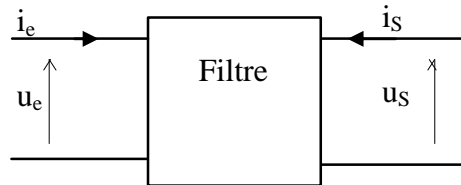
Un filtre est un circuit électronique (quadripôle) qui réalise une opération de traitement du signal. Autrement dit, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres.

Il existe plusieurs types de filtres, mais les filtres qui figurent dans le programme sont :

- filtre passe-bas passif (RC)
- filtre passe-bas actif (RC avec AOP)
- filtre passe-haut (CR)
- filtre passe-bande (R,L,C)

Schéma

- u_e : tension d'entrée
- u_s : tension de sortie
- i_e : courant d'entrée
- i_s : courant de sortie



2- Types de filtres

Voici la caractéristique des trois différents types de filtres :

***filtre passe-haut** : Il ne laisse passer que les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, appelée "*fréquence de coupure*". Il atténue les autres (les basses fréquences). Autrement dit, il «laisse passer ce qui est haut». C'est un atténuateur de graves pour un signal audio. On pourrait aussi l'appeler coupe-bas.

***filtre passe-bas** : Il ne laisse passer que les fréquences au-dessous de sa *fréquence de coupure*. C'est un atténuateur d'aiguës pour un signal audio. On pourrait l'appeler coupe-haut.

***filtre passe-bande** : Il ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquences et atténue tout ce qui est au-dessus ou en-dessous de cette bande. Il est très utilisé dans les récepteurs radio, tv... pour isoler le signal que l'on désire capter.

3- transmittance ou fonction de transfert

La transmittance du filtre notée **T** tel que $T = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$ (T est sans unité).

4- Le gain du filtre

Le gain lié à T par la relation $G=20\log(T)$ (**G** s'exprime en décibel (**dB**))

5-Bande passante et fréquence de coupure d'un filtre

La transmittance passe par un maximum T_{max} qui lui correspond un gain G_{max} .

Le filtre est passant (signal d'entrée transmis en sortie) lorsque sa transmittance est

$$T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \text{ donc lorsque son gain } G \geq G_{max} - 3 \text{ dB}$$

Cette valeur de T ou de G est atteinte dans la cas d'un filtre passe bande pour deux fréquences

N_1 et N_2 , appelées fréquences de coupure N_{Cb} et N_{Ch} (l'une haute l'autre basse) $T(N_c) = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$

On appelle bande passante du filtre passe bande l'intervalle de fréquences $[N_1, N_2]$ pour lequel

$$\text{on a } T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \text{ et } G \geq G_{max} - 3 \text{ dB}$$

La largeur de la bande passante est donnée par la différence $N_2 - N_1$ des fréquences de coupures. ($N_2 > N_1$)

Plus la bande passante est étroite plus le filtre est dit sélectif

Dans le cas d'un filtre passe bas $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ pour $N \leq N_c$

Dans le cas d'un filtre passe haut $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ pour $N \geq N_c$

II/ Etude de quelque filtres

1-Filtre passe-bas passif

a- Equation différentielle

$$RC \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s = u_e = U_{e\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_e)$$

Solution de l'équation : $u_s = U_{s\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_s)$

b- Expression de $U_{s\max}$

A partir de la représentation de Fresnel

$\frac{du_s}{dt}$ est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur u_s

u_e est toujours en avance de phase sur u_s

$$U_{s\max} = \frac{U_{e\max}}{\sqrt{1+(R.C.W)^2}} \text{ avec } \omega = 2\pi N$$

$\text{tg}(\varphi_e - \varphi_s) = R.C.W = 2\pi N.R.C$

c- La transmittance du filtre

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{1}{\sqrt{1+(R.C.W)^2}} \text{ La valeur maximale de cette transmittance est } T_{\max} = 1$$

Ceci est lorsque ω tend vers zéro c'est pourquoi il est dit filtre passe bas.

d- Le gain du filtre

$$G = 20 \log(T) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(R.C.W)^2}}\right) = -10 \cdot \log(1+(R.C.W)^2) \text{ et le gain maximal est } G_{\max} = 0 \text{ dB}$$

e- La fréquence de coupure N_C .

Lorsque la fréquence de la tension d'entrée est $N = N_C$, la transmittance de ce filtre est

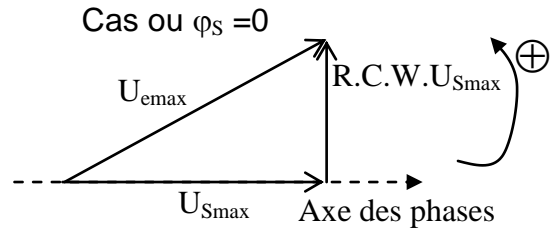
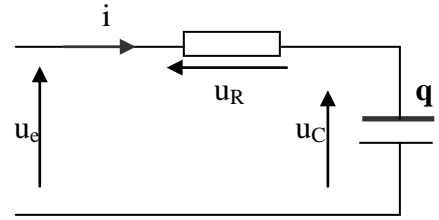
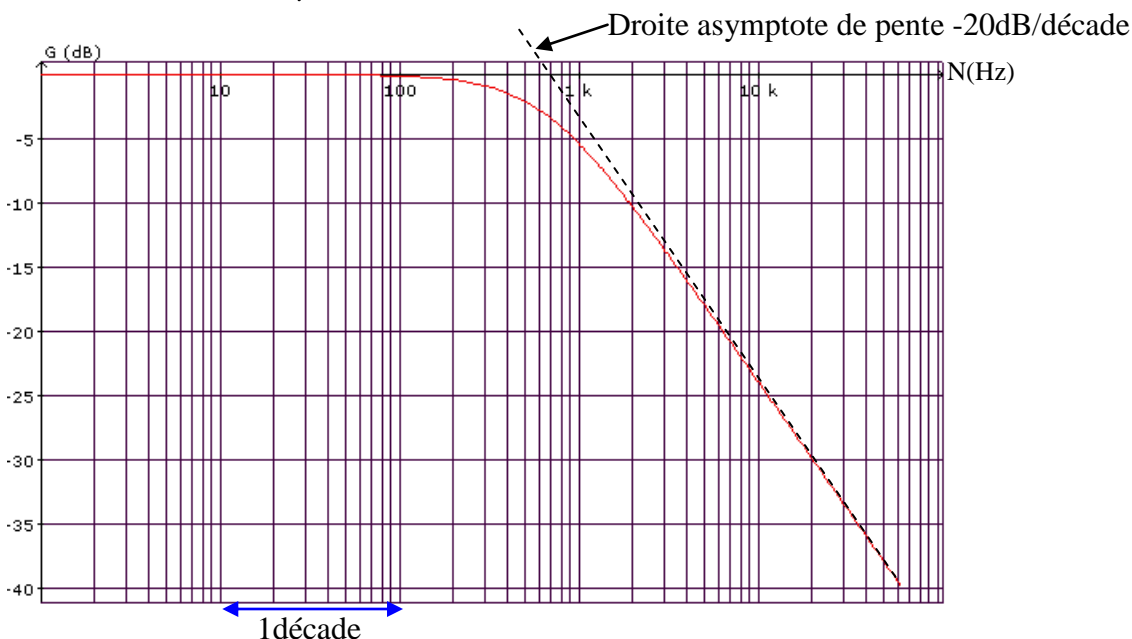
$$T(N_C) = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G = G_{\max} - 3 \text{ dB. On trouve } \frac{1}{\sqrt{1+(R.C.2\pi.N_C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_C = \frac{1}{2\pi.R.C}$$

Remarque : Lorsque $N = N_C$, on a $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_s) = 2\pi N_C.R.C = 1 \Rightarrow (\varphi_e - \varphi_s) = \frac{\pi}{4}$ et $U_{s\max} = \frac{U_{e\max}}{\sqrt{2}}$

On peut déterminer graphiquement la fréquence de coupure en traçant la droite asymptote à la courbe du gain. L'intersection de cette droite avec l'axe de fréquence nous donne la fréquence de coupure du filtre

Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe bas passif

$R = 500\Omega$ et $C = 0,5 \mu F$



2-Filtre passe-bas actif

a- Equation différentielle

$$R_2 \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s = -\frac{R_2}{R_1} u_e = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_{e_{max}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_e)$$

Solution de l'équation : $u_s = U_{s_{max}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_s)$

b- Expression de $u_{s_{max}}$

A partir de la représentation de Fresnel

$$\frac{du_s}{dt} \text{ est en avance de phase de } \frac{\pi}{2} \text{ sur } u_s$$

u_e est toujours en retard de phase sur u_s

$$U_{s_{max}} = \frac{R_2 \cdot U_{e_{max}}}{R_1 \cdot \sqrt{1 + (R_2 \cdot C \cdot \omega)^2}} \text{ avec } \omega = 2\pi N$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi_s - \varphi_e) = R_2 \cdot C \cdot \omega = 2\pi N \cdot R_2 \cdot C$$

c- La transmittance du filtre

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{R_2}{R_1 \cdot \sqrt{1 + (R_2 \cdot C \cdot \omega)^2}} \text{ La valeur maximale de cette transmittance est } T_{max} = \frac{R_2}{R_1}$$

Ceci est lorsque ω tend vers zéro c'est pourquoi il est dit filtre passe bas.

d- Le gain du filtre

$$G = 20 \log(T) = 20 \cdot \log\left(\frac{R_2}{R_1 \cdot \sqrt{1 + (R_2 \cdot C \cdot \omega)^2}}\right); \text{ le gain maximal est } G_{max} = 20 \cdot \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$G_{max} > 0 \text{ Si } \frac{R_2}{R_1} > 1 \Rightarrow R_2 > R_1; G_{max} < 0 \text{ Si } \frac{R_2}{R_1} < 1 \Rightarrow R_2 < R_1 \text{ et } G_{max} = 0 \text{ Si } \frac{R_2}{R_1} = 1 \Rightarrow R_2 = R_1$$

On remarque bien que le gain maximal est indépendant de la capacité C du condensateur

e- La fréquence de coupure N_C .

Lorsque la fréquence de la tension d'entrée est $N = N_C$, la transmittance de ce filtre est

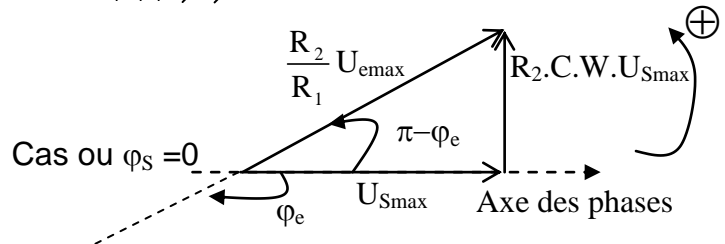
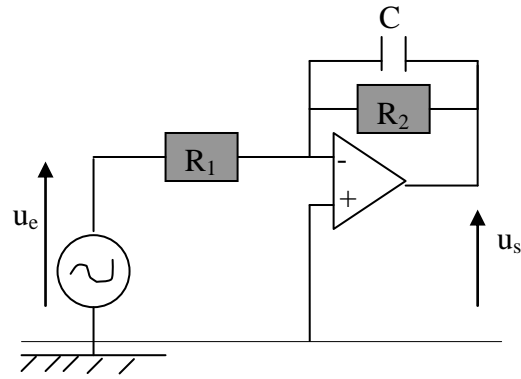
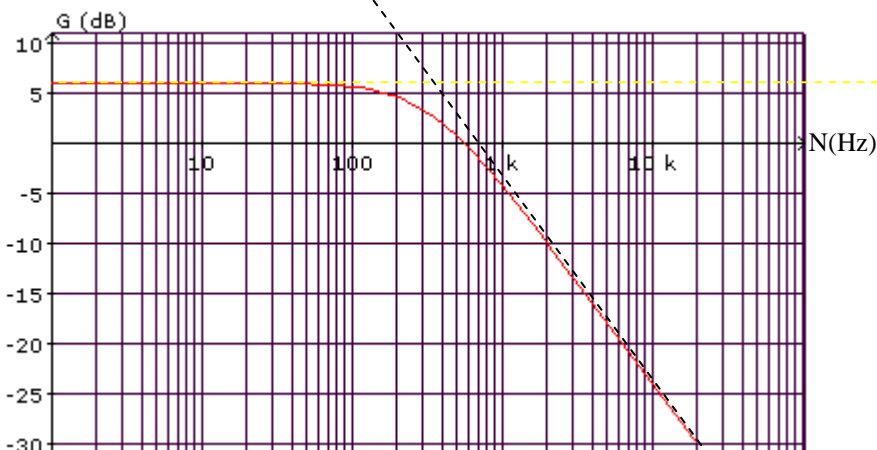
$$T(N_C) = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G = G_{max} - 3 \text{ dB. On trouve } \frac{R_2}{R_1 \cdot \sqrt{1 + (R_2 \cdot C \cdot 2\pi \cdot N_C)^2}} = \frac{R_2}{R_1 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow N_C = \frac{1}{2\pi \cdot R_2 \cdot C}$$

On remarque bien que la fréquence de coupure N_C est indépendante de la résistance R_1

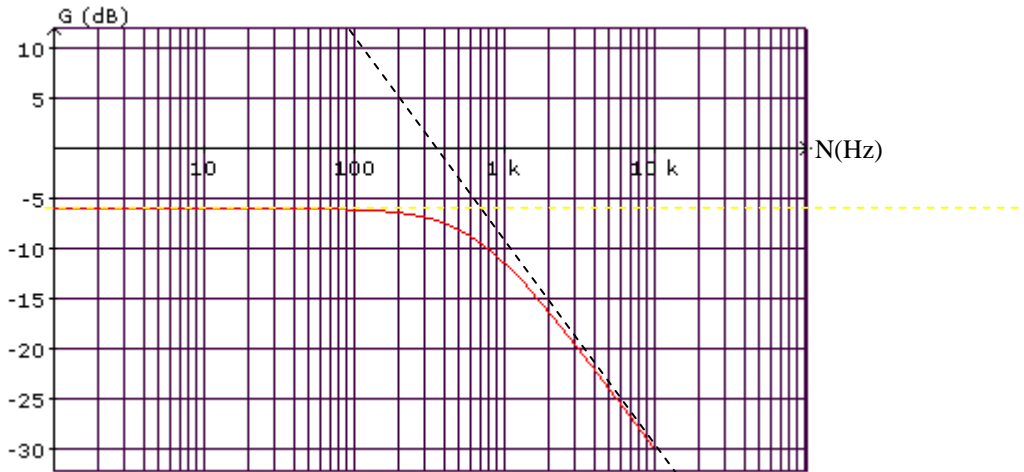
Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe bas actif

On peut déterminer graphiquement la fréquence de coupure en traçant la droite asymptote à la courbe du gain. L'intersection de cette droite avec la droite horizontale $G = G_{max}$ nous donne la fréquence de coupure du filtre

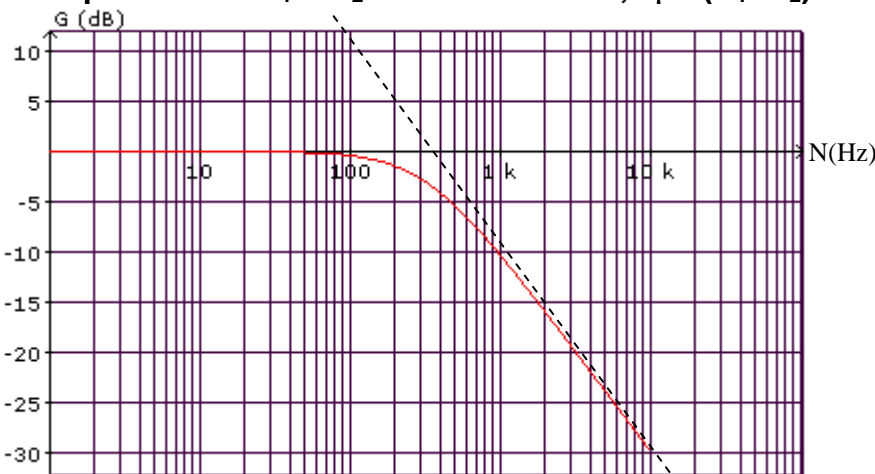
Exemple1 : $R_1 = 500\Omega$, $R_2 = 1000\Omega$ et $C = 0,5 \mu F$ ($R_1 < R_2$) on a $G_{max} > 0$



Exemple2 : Pour $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$ et $C = 0,5 \mu F$ ($R_1 > R_2$) on a $G_{max} < 0$ et N_c est la même



Exemple3 : Pour $R_1 = R_2 = 1000 \Omega$ et $C = 0,5 \mu F$ ($R_1 > R_2$) on a $G_{max} = 0$



3-Filtre passe-haut

a- Equation différentielle

$$u_s + \frac{1}{RC} \cdot \int u_s dt = u_e = U_{emax} \cdot \sin(\omega t + \varphi_e)$$

Solution de l'équation : $u_s = U_{smax} \cdot \sin(\omega t + \varphi_s)$

b- Expression de u_{smax}

A partir de la représentation de Fresnel

$\int u_s dt$ est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur u_s

u_e est toujours en retard de phase sur u_s

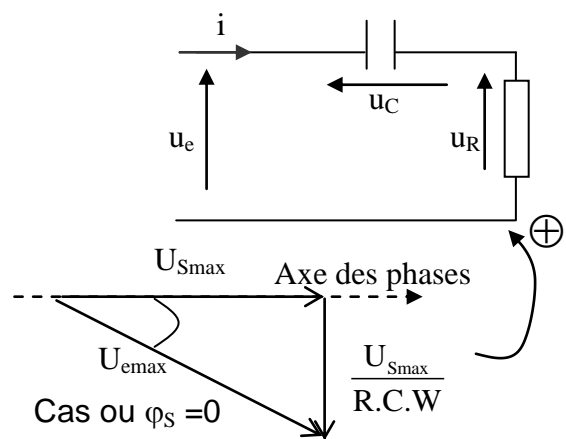
$$U_{smax} = \frac{U_{emax}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R.C.W}\right)^2}} \text{ avec } \omega = 2\pi N$$

$$\text{tg}(\varphi_s - \varphi_e) = \frac{1}{R.C.W} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R.C.N}$$

c- La transmittance du filtre

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R.C.W}\right)^2}} \text{ La valeur maximale de cette transmittance est } T_{max} = 1$$

Ceci est lorsque ω est très grande c'est pourquoi il est dit filtre passe haut



d- Le gain du filtre

$$G = 20 \log(T) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R \cdot C \cdot W}\right)^2}}\right) = -10 \cdot \log\left(1 + \left(\frac{1}{R \cdot C \cdot W}\right)^2\right)$$

et le gain maximal est $G_{\max} = 0 \text{ dB}$

e- La fréquence de coupure N_c .

Lorsque la fréquence de la tension d'entrée est $N = N_c$, la transmittance de ce filtre est

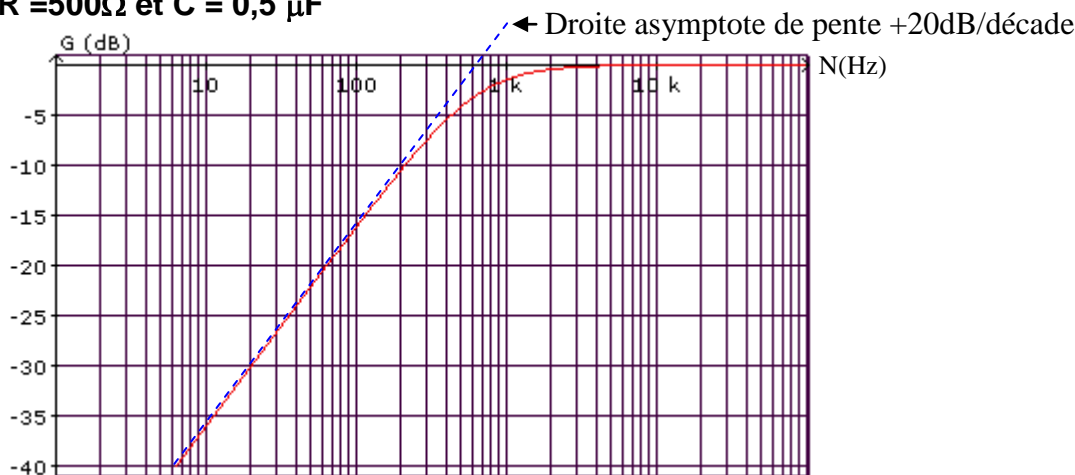
$$T(N_c) = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G = G_{\max} - 3 \text{ dB. On trouve } \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R \cdot C \cdot 2 \cdot \pi \cdot N_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

Remarque : Lorsque $N = N_c$, on a $\text{tg}(\varphi_s - \varphi_e) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C \cdot N_c} = 1 \Rightarrow (\varphi_s - \varphi_e) = \frac{\pi}{4}$ et $U_{s\max} = \frac{U_{e\max}}{\sqrt{2}}$

On peut déterminer graphiquement la fréquence de coupure en traçant la droite asymptote (oblique) à la courbe du gain. L'intersection de cette droite avec l'axe de fréquence nous donne la fréquence de coupure du filtre

Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe haut

$R = 500 \Omega$ et $C = 0,5 \mu\text{F}$



1-Filtre passe- bande

a- Equation différentielle

$$\frac{L}{R_0} \frac{du_s}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R_0}\right) \cdot u_s + \frac{1}{R_0 C} \cdot \int u_s dt = u_e = U_{e\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_e)$$

Solution de l'équation : $u_s = U_{s\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_s)$

b- Expression de $u_{s\max}$

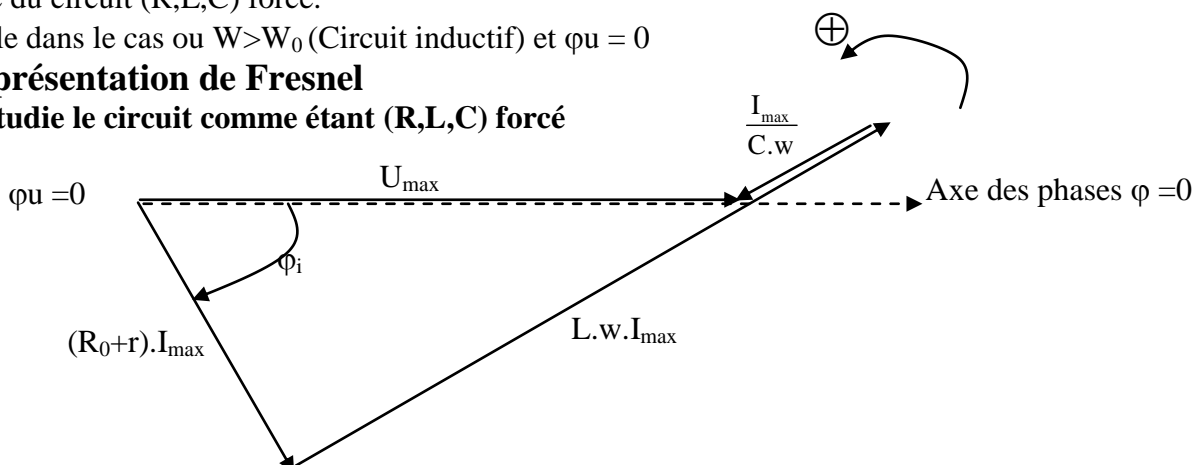
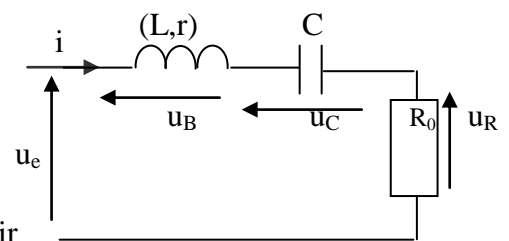
A partir de la représentation de Fresnel

On peut déduire la représentation de Fresnel relative au filtre à partir de celle du circuit (R,L,C) forcé.

Exemple dans le cas où $\omega > \omega_0$ (Circuit inductif) et $\varphi_u = 0$

La représentation de Fresnel

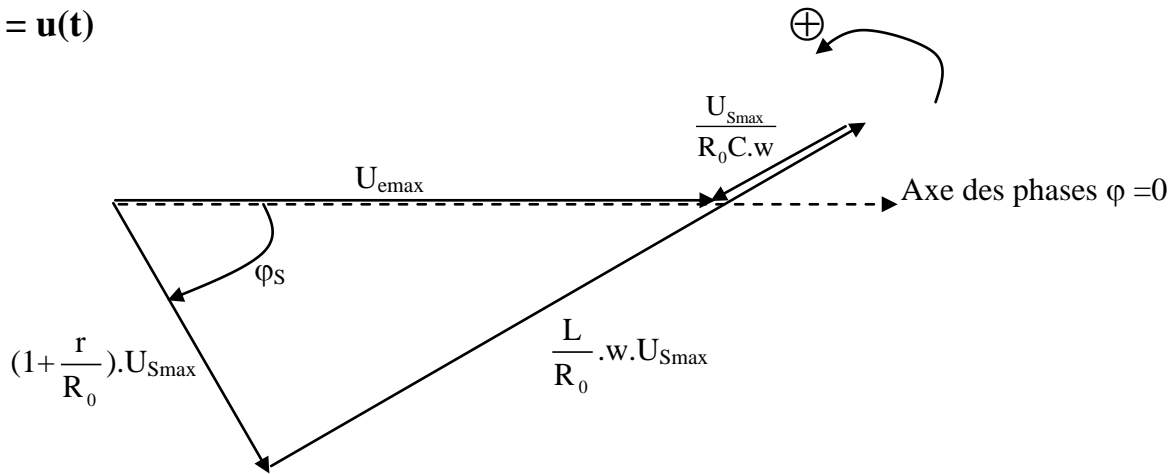
Si on étudie le circuit comme étant (R,L,C) forcé



$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \text{ et } U_{R\max} = R_0 \cdot I_{\max} = \frac{R_0 \cdot U_{\max}}{Z} = \frac{R_0 \cdot U_{\max}}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

Si on étudie le circuit (R,L,C) comme étant un filtre ou $u_s = u_R$ ($U_{s\max} = R_0 \cdot I_{\max} \Rightarrow I_{\max} = \frac{u_{s\max}}{R_0}$)

$$u_e(t) = u(t)$$



$$U_{S\max} = \frac{R_0 \cdot U_{e\max}}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

c- La transmittance du filtre

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{R_0}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \text{ La valeur maximale de cette transmittance est } T_{\max} \leq 1$$

d- Le gain du filtre

$$G = 20 \log(T) = 20 \cdot \log\left(\frac{R_0}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}\right) \text{ et le gain maximal est } G_{\max} \leq 0 \text{ dB}$$

e- La bande passante du filtre

La transmittance passe par un maximum T_{\max} qui lui correspond un gain G_{\max} .

Le filtre est passant (signal d'entrée transmis en sortie) lorsque sa transmittance est

$$T \geq \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ donc lorsque son gain } G \geq G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

Cette valeur de T ou de G est atteinte dans la cas d'un filtre passe bande pour deux fréquences

N_1 et N_2 , appelées fréquences de coupure N_{Cb} et N_{Ch} (l'une haute l'autre basse) $T(N_c) = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$

On appelle bande passante du filtre passe bande l'intervalle de fréquences $[N_1, N_2]$ pour lequel

$$\text{on a } T \geq \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ et } G \geq G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

La largeur de la bande passante est donnée par la différence $N_2 - N_1$ des fréquences de coupures. ($N_2 > N_1$)

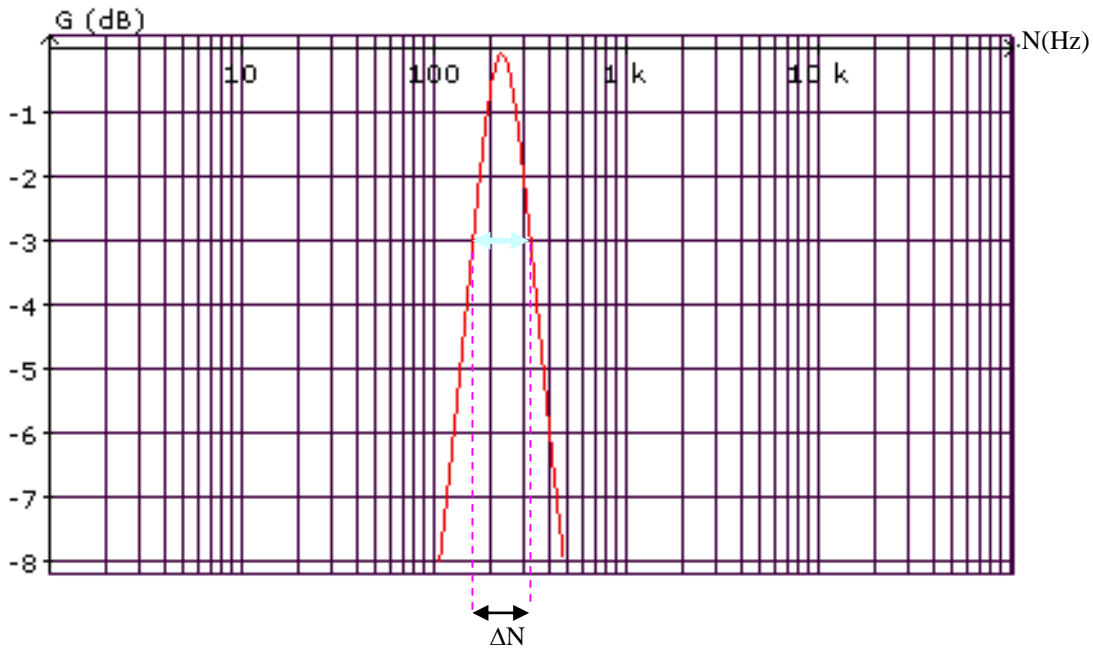
On a

$$N_2 - N_1 = \frac{(R_0+r)}{2 \cdot \pi \cdot L}$$



Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe bande

$R_0 = 500\Omega$, $r = 10\Omega$, $L = 1\text{ H}$ et $C = 0,5\ \mu\text{F}$



ΔN est la largeur de la bande passante

