Devoir De Contrôle N°1

Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

- Pour Chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Un argument du nombre complexe : $(1+i)^{2010}$ est :

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$

2) Soient les nombres complexes $a = 1-i$ et $b = 1+i\sqrt{3}$ alors :

a) $a \cdot b = 2\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{12}}$ **b)** $a \cdot b = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{12}}$ **c)** $a \cdot b = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{6}}$

3) Pour tout nombre complexe z, $|z-i|$ est égal à :

a) $|z-1|$ **b)** $|iz+1|$ **c)** $|z|+1$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3}-x)$ est égale à :

a) $+\infty$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 0

Exercice 2 (4 points)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3+x^2-x+1 & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution $\alpha \in]-2,-1[$.

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour $x>0$: $-x+2 \le f(x) \le x+2$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

3) f est-elle continue en 0 ?.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$,
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{3}+i$ et $z_C = -\sqrt{3}-i$.

1) Ecrire z_A ; z_B et z_C sous forme exponentielle.

2) a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

b) Montrer que ABCO est un losange..

3) Soit M le point d'affixe $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

a) Calculer la distance OM.

b) Ecrire Z sous la forme algébrique

c) Ecrire Z sous la forme exponentielle.

d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$