Lycée Houmet Souk 1	Devoir de Contrôle N : 1	4 Technique 4
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	12 - 11 - 2013

EXERCICE N : 1 (8 points)

A) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} & \text{si} \quad x \in [0, +\infty[\end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

b) Montrer que f est continue en 0 .

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0 .Que peut on déduire ?

b) Donner des équations cartésiennes des demi tangentes à (C f) au point O .

B) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

1) Prouver que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

2) Sans résoudre l'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$,montrer qu'elle admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α

3) Vérifier que $\alpha \in]1.33 ; 1.34[$.

EXERCICE N : 2 (4 points)

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1) Déterminer le sens de variation de f sur $[0, 1]$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $g(x) = f(tg\, x)$.

Justifier que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

3) On admet que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $g(x) = x$.

a) Prouver que $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$; $\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$.

c) Déduire que pour tout $x \in [0, 1]$; $x + \dfrac{\pi}{4} - 1 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE N : 3 *(8 points)*

A) *Soit* **m un nombre complexe non nul** *. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 2imZ - (1 + m^2) = 0$.*

B) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

On considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectives : $Z_0 = i$, $Z_1 = im + 1$ et $Z_2 = im - 1$.

I) *On suppose que :* ***m est un réel non nul .***

1) *Vérifier que : $OM_1 = OM_2$.*

2) *Montrer que (OA) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.*

3) *Déterminer les valeurs de m , pour que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral .*

II) *On suppose que :* $\boldsymbol{m = -ie^{2i\theta}}$ *où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.*

1) *Déterminer et construire l'ensemble* **(Γ)** *des points M_1 lorsque θ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.*

2) a) *Déterminer la forme exponentielle de Z_1 et Z_2 .*

b) *Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2})$.*

c) *Déduire la nature du triangle OM_1M_2 .*

3) a) *Montrer que $\dfrac{OM_2}{OM_1} = tg(\theta)$.*

b) *Déduire la valeur de θ pour laquelle OM_1M_2 est isocèle*

Bon travail.