LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
4EME TECHNIQUE «3»

2013/2014
DEVOIR DE CONTRÔLE N1
MATHEMATIQUES
2 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit le nombre complexe $z=-2.e^{i\frac{\pi}{3}}$, Alors :

a) $\arg(z)\equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$ b) $\arg(z)\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ c) $\arg(z)\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) Le nombre complexe $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$ est égale à :

a) $i.e^{i\frac{\pi}{4}}$ b) $3.e^{i\frac{3\pi}{4}}$ c) $3.e^{i\frac{\pi}{4}}$

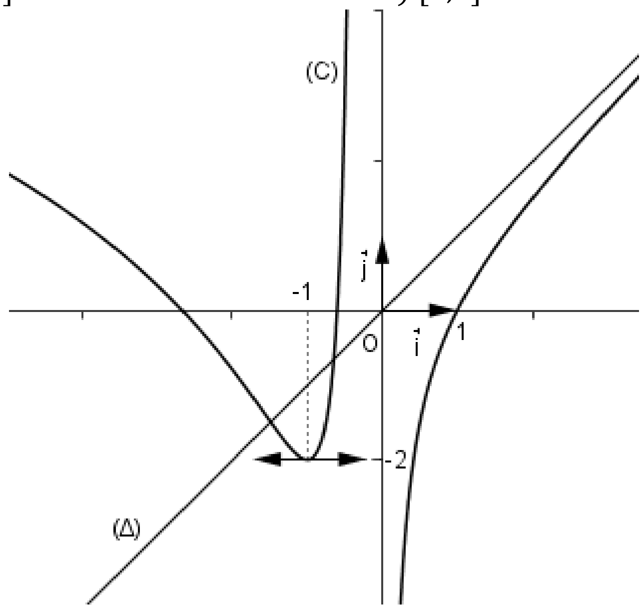
3) La limite de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin(3x^2)}{x}$ en 0 :

a) 0 b) 1 c) 3

4) L'équation $\sqrt{x-1} - x^3 + x + 3=0$ admet une solution α dans l'intervalle :

a) [1,2] b) [2,3] c) [3,4]

EXERCICE 2 : (5 points)



$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur IR^*, les droites (Δ) : y=x et l'axe $(O, \vec{j})$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au v(-∞) une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$.

1) Dresser le tableau de variation de f. (On demande les limites aux bornes et le signe de $f'(x)$)

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\tan x)$

3) Déterminer le nombre de solutions dans IR^* de chacune des équations suivantes : f(x)=0 et f(x)=x

4) Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x-2\cos(\pi x)}{x-2} & \text{si } x \le 1 \\ g(x) = \frac{6(2-\sqrt{x^2+3})}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note h la fonction définie par : h=gof

a) Montrer que $\frac{x+2}{x-2} \le g(x) \le 1$ pour tout $x\le 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

c) Montrer que la fonction g est continue en 1.

d) Montrer que la fonction h est continue sur$]0,+\infty[$.

Voir suite au verso

EXERCICE 3 : (5 points)

Soit la fonction $f : x \longmapsto 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $x \in]1, +\infty[$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier les branches infinies de (C).

2) a) Montrer que f est dérivable sur$]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

b) Etablir le tableau de variation de f.

3) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x)=f(x)+x$

a) Montrer que $g(]1, +\infty[) = IR$

b) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$.

c) Vérifier que $1,1 < \alpha < 1,2$.

EXERCICE 4 : (7 points)

Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $1-2i$.

À tout nombre complexe $z \neq 1$ on associe : $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que : z' soit réel.

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a : $(z'-1)(z-1) = 2i$

b) En déduire que pour tout point M distinct de A, on a :

$AM \times AM' = 2$

c) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre A et passant par O, alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera.

3) a) Montrer que pour tout point M distinct de A, on a :

$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

b) En déduire que si M appartient à la perpendiculaire à $(O,\vec{u})$ passant par A, alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

4) On pose $z = 2.e^{i2\theta} + 1$; $\theta \in [-\pi, \pi]$

a) Montrer que $z' = 2.\cos(\theta - \frac{\pi}{4}).e^{i(\frac{\pi}{4} - \theta)}$

b) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le point M' appartient à l'axe des abscisses $(O,\vec{u})$.

Bon travail