

EXERCICE N : 1 (3 points)

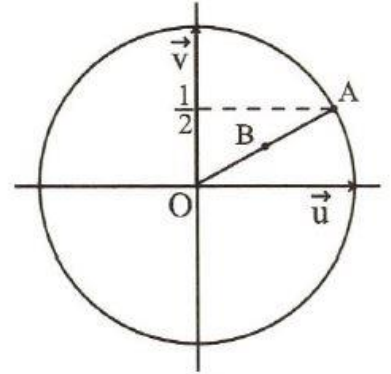
Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte . Sans justification , le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) Dans la figure ci-contre (O , \vec{u} , \vec{v}) est un repère orthonormé direct

et A le point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

Si B est le milieu du segment $[OA]$ alors l'affixe du point B est

- a) $\frac{\sqrt{2}+i}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$



2) L'ensemble des points M d'affixe Z tels que : $(Z - i) (\bar{Z} + i) = 1$ est

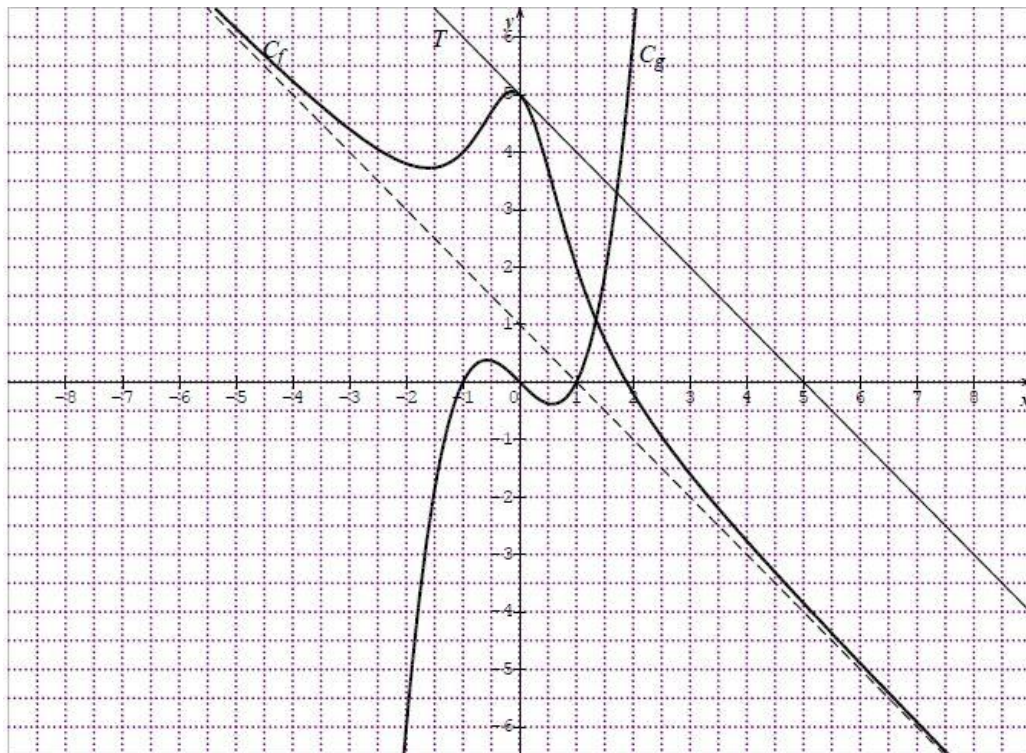
- a) un point b) une droite c) un cercle

3) Le module du nombre complexe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est égal à

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2

EXERCICE N : 2 (5 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur IR par les courbes représentatives ci-dessous :



- 1) Déterminer : $f'(0)$; $f \circ g(-1)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$; $g(]-\infty ; -1[)$ et $f \circ g([1 ; +\infty[)$

2) Donner la nature de la branche infinie de la courbe de $f \circ g$ au voisinage de $+\infty$. (Justifier)



EXERCICE N : 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O , \vec{u} , \vec{v}).

On désigne par (\mathcal{C}) le cercle de centre O et de rayon 1 et par A et J les points d'affixes respectives :

$$a = \sqrt{3} + i \text{ et } 1 .$$

1) a) Donner la forme exponentielle de a .

b) Construire le point A .

2) Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-a}$.

a) Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle (\mathcal{C}) .

b) Montrer que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel . Interpréter graphiquement ce résultat .

c) Déduire alors la Construction du point B .

3) Soit θ un argument du nombre complexe b . Montrer que : $\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+8}-2 & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x \in]-1; +\infty[\setminus \{0\} \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O , \vec{i} , \vec{j}).

1) a) Montrer que la droite $\Delta : y = -x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C}f)$ au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et Interpréter graphiquement ce résultat .

2) Montrer que f est continue en -1 .

3) a) Vérifier que pour tout $x \in]-1; +\infty[\setminus \{0\}$ on a : $|f(x)| \leq |x|$.

b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 .

4) Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{6}{5}$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]1; 3[$.

5) a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty ; -1]$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle .

b) Montrer que f est dérivable sur $] -1 ; +\infty [\setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle .

c) En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[1 ; \alpha]$ pour la fonction f ,

montrer qu'il existe un réel $\theta \in] 1 ; 3 [$ tel que : $\sin\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) - \frac{\pi}{2\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = \frac{1}{5(\alpha-1)}$.