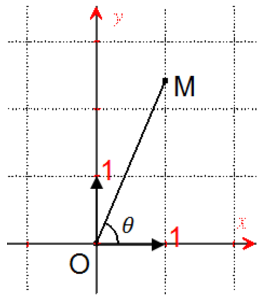
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 4 ème Tech 2
Date : 04 / 11 / 2015	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0.75 point, une réponse fausse enlève 0.25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

1) Soit le nombre complexe $Z=-2e^{i\frac{\pi}{6}}$, on a :

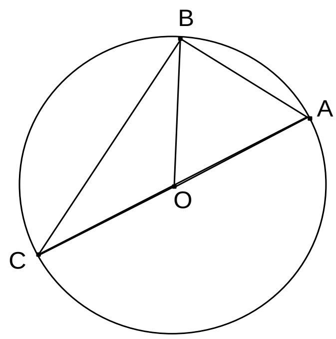
   $a/\ \arg(Z)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad b/\ \arg(Z)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad c/\ \arg(Z)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$



2) M est le point d'affixe z tel que $\mathrm{Re}(z)=1$ et $\arg(z)=\theta+2k\pi$.

   La forme exponentielle de z est :

   $a/\ \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ $\quad b/\ \cos\theta e^{i\theta}$ $\quad c/\ \sin\theta e^{i\theta}$



3) Le triangle OAB est équilatéral.

   Les points A, B et C ont pour affixes respectives a, b et c.

   $\frac{b-c}{b-a}$ est égale à :

   $a/\ 1$ $\quad b/\ i$ $\quad c/\ i\sqrt{3}$.

4) L'image de l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$ par la fonction $f: x \mapsto x^2$ est :

   $a/\ [0\ ;\ 4]$ $\quad b/\ [1\ ;\ 4]$ $\quad c/$ Autre réponse.

Exercice n°2 : (4 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit θ un réel de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$. On désigne par A, M et N les points d'affixes respectives $z_A=2$, $z_M=1+e^{i\theta}$ et $z_N=1-e^{i\theta}$.

1) Montrer que : $z_M=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $z_N=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$.
2) Montrer que le quadrilatère $OMAN$ est un rectangle.
3) Déterminer θ pour que $OMAN$ soit un carré.

Exercice n°3 : (6 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note A la point d'affixe 1 et B le point d'affixe $1-2i$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z\neq 1$ associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{z-1+2i}{z-1}$.

1) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que z' est un réel.
2) $a/$ Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq 1$, on a : $(z'-1)(z-1)=2i$.

   $b/$ En déduire que pour tout point M distinct de A, on a : $AM\times AM'=2$.

   $c/$ Montrer alors que, si M appartient au cercle (C) de entre A et de rayon 1, alors M' appartient a un cercle (C') que l'on précisera.
3) $a/$ Montrer que pour tout point M distinct de A, on a : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

   $b/$ En déduire que, si M appartient à la perpendiculaire à $\left(O,\vec{u}\right)$ passant par A, alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

Exercice n°3 : (7 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x}-2x+8 & si\ x\leq 0\\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & si\ x>0\end{cases}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) $a/$ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   $b/$ Montrer que, pour tout $x>0$, on a : $\dfrac{-1}{\sqrt{x+4}-2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   $c/$ Interpréter géométriquement le résultat.
2) $a/$ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

   $b/$ Montrer que f est continue en 0.
3) $a/$ Montrer que : pour tout $x<0$, on a : $f(x)+3x-8=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$.

   $b/$ En déduire que la droite $D: y=-3x+\dfrac{17}{2}$ est une asymptote de C_f.

Bonne chance