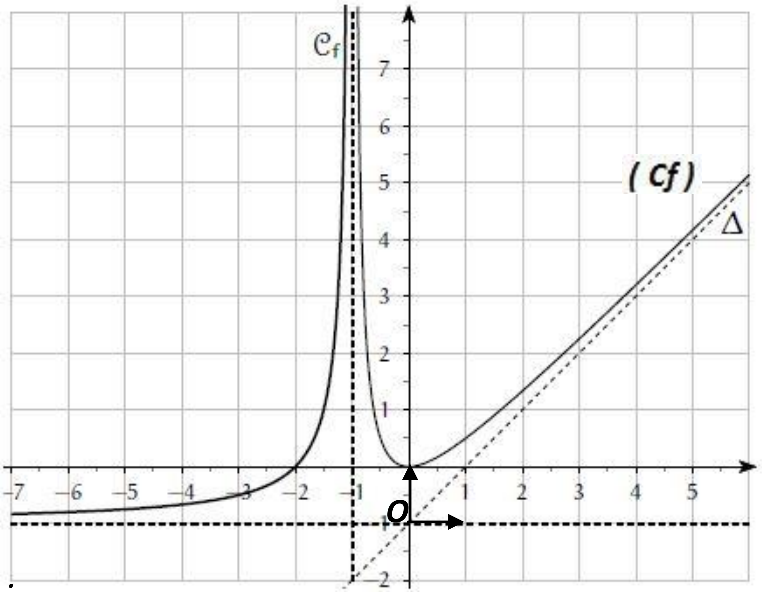
Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 1	4 Technique 1
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	08 - 11 - 2016

EXERCICE N : 1 (4 points)

La courbe **(Cf)** ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR \{ - 1 } .



A) Par lecture graphique , déterminer :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ et $f(\,]-\infty\,;-2\,]\,)$.

2) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution(s) de l'équation : $f(x) = m$

B) Soit la fonction g définie par : $g(x) = f \circ f(x)$.

1) a) Justifier que g est définie sur IR \{ - 1 } .

b) Montrer que g est dérivable IR \{ - 1 } et déterminer $g'(-2)$.

2) g est elle prolongeable par continuité en -1 ? justifier la réponse .

EXERCICE N : 2 (6 points)

A) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

b) Montrer que f est continue en 0 .

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0 .

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

B) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

1) Prouver que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

2) Déterminer $g([0, +\infty[)$. Justifier

3) Déduire que l'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α .

4) Vérifier que $\alpha \in]1.33 ; 1.34[$.

EXERCICE N : 3 (5.5 points)

A) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 2i$ et $Z_B = \sqrt{3} - i$.

1) a) Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes Z_A et Z_B .

b) Prouver que A et B appartiennent à un cercle (Γ) de centre O dont on précisera le rayon .

2) Placer , dans le plan P , les points A et B .

B) Soit $f : P \setminus \{ A \} \rightarrow P$; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \dfrac{2iZ}{Z - 2i}$.

1) Déterminer (Δ) l'ensemble des points M tels que $|Z'| = 2$.

2) Vérifier que pour tout $Z \neq i$ on a : $(Z' - 2i)(Z - 2i) = -4$.

3) a) Montrer que pour tout $M \neq A$, on a : $AM' . AM = 4$ et $(\widehat{\vec{u} , \overrightarrow{AM'}}) \equiv \pi - (\widehat{\vec{u} , \overrightarrow{AM}}) (2\pi)$.

b) Montrer que si M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 2 alors M'appartient à $(\mathscr{C})$

c) Soit M un point quelconque du cercle $(\mathscr{C})$.

En utilisant les questions **3) a)** et **3) b)** , construire le point M' .

EXERCICE N : 4 (4.5 points)

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E) :** $Z^2 - 2\cos\theta \, Z + 2 (1 - \sin\theta) = 0$.

1) Prouver que $2i (\sin\theta - 1)$ est une racine carrée du discriminant Δ de l'équation **(E) .**

2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** .

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$, on donne $\theta \in \left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right[$.

On considère les points M_1 et M_2 et N d'affixes respectives : $Z_1 = e^{i\theta} - i$, $Z_2 = e^{-i\theta} + i$ et $Z_3 = 2\cos\theta$

1) Déterminer et construire l'ensemble **(Γ)** des points M_1 lorsque θ varie dans $\left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right[$.

2) a) Montrer que les droites $(M_1 M_2)$ et (ON) sont perpendiculaires .

b) Montrer que $O M_1 N M_2$ est un losange .

Bon travail.