

### QCM : (2 points )

Cocher la réponse exacte. En justifiant

- 1) . Le nombre complexe  $(1 + i)^6$  est :  
 a/ un réel      b/ imaginaire pur      c/ ni réel ni imaginaire
- 2) Le conjugué du nombre complexe  $1 - iZ$  est :  
 a/  $1 + iZ$       b/  $1 + iZ$       c/  $1 - iZ$
- 3) La forme exponentielle du complexe  $1 + e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]0 ; \pi[$  est :  
 a/  $e^{i\frac{\theta}{2}}$       b/  $2\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$       c/  $2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$
- 4) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = 3$  alors sa courbe  $C_f$  représentative dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  admet au voisinage de  $(+\infty)$  une asymptote d'équation :  
 a/  $y = x - 3$       b/  $y = x + 3$       c/  $y = -x + 3$

### Exercice 1 : (3 points )

La courbe  $(C_f)$  ci-contre est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

A) Par lecture graphique, déterminer :

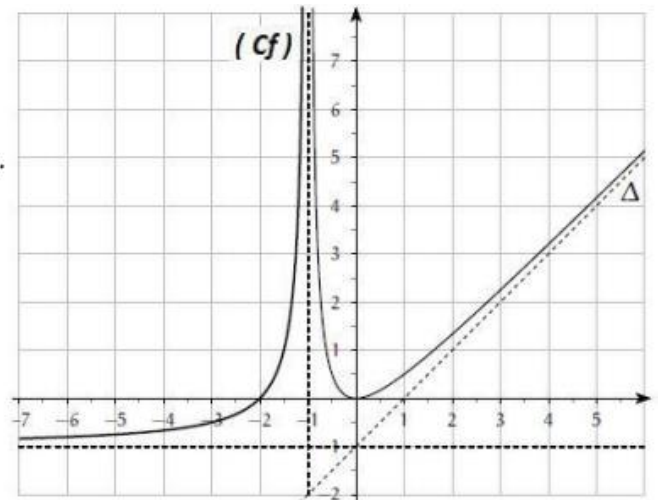
- 1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  et  $f(-\infty ; -2)$ .

2) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solution(s) de l'équation :  $f(x) = m$ .

B) Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ .

Déterminer le domaine de définition de  $g$ .



## **Exercice 2: (4 points )**

Dans le plan muni d'un repère  $R = (O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = -2 + i$  ;  $z_B = -3i$  ;  $z_C = 6 + 5i$ .

1/Placer ces trois points dans le repère  $R = (O; \vec{u}; \vec{v})$ .

2/Déterminer une mesure d'angle orienté  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

3/Montrer alors que le triangle ABC est un triangle rectangle.

4/On considère le point D d'affixe  $z_D = 4 - i$ .

a) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z définie par:  $Z = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$

b) Justifier que la demi-droite [AD) est la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

5/On désigne par E l'ensemble des points M(z) tel que  $|\frac{z_B - z_A}{z_M - z_A}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

a)Vérifier que D est un point de E.

b)Déterminer et construire E.

## **Exercice 3: (4 points )**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On donne les points A, B, C et I d'affixes respectives  $4$  ;  $2i$  ;  $3+3i$  et  $1$ .

1) Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

2) On associe, à tout point M d'affixe  $z \neq 2i$ , le point M' d'affixe  $z' = \frac{z-4}{z-2i}$

a- Montrer que  $IM' \cdot BM = 2\sqrt{5}$ .

b- En déduire que si M' appartient au cercle (C') de centre I et de rayon  $\sqrt{5}$  alors M varie sur un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

3) a- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M lorsque  $|z'| = 1$ .

b- Déterminer et construire l'ensemble (E') des points M pour que  $z'$  soit un réel.

## **Exercice 4: ( 2 points )**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On nomme J le point d'affixe  $i$

À tout point M d'affixe  $z$  différent de  $i$ , on associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que  $z' = i + \frac{2}{\bar{z} + i}$

1. a. Déterminer l'affixe de l'image du point I d'affixe  $1$ .

b. Déterminer l'affixe de l'image du point A d'affixe  $1 + i$ .

2. montrer que  $M' = M \Leftrightarrow M$  appartient au cercle de centre J et de rayon  $\sqrt{2}$

3. a. vérifier que  $\frac{z' - i}{z - i} \in \mathbb{R}$  Interpréter géométriquement ce résultat.

b. montrer que  $\forall M \neq J$  on a :  $JM \cdot JM' = 2$

Déduire que si  $M \in \mathcal{C}(J, 2)$ , alors M' appartient un cercle fixe que l'on précisera



### **Exercice 5: (5 points )**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x} \cos x}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{4\sqrt{x^2+1}-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue en 0 .
- 2) a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$  on a :  $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$   
b) Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{4}x]$   
b) Interpréter graphiquement le résultat .
- 4) a) Montrer que  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans  $] \frac{\pi}{2} ; \pi [$   
b.) Montrer que  $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

**BONNE CHANCE**

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$$e^0 = 1, e^{i\pi/2} = i, e^{i\pi} = -1, e^{-i\pi/2} = -i$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |e^{ix}| = 1.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}, \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}, \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ et } e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^{ix})^n = e^{inx}.$$